

Bayesian Inference for continuous time GARCH diffusion limit stochastic volatility models

TaeHyung Kim JeongMin Park*

Abstract We propose a new Bayesian Markov chain Monte Carlo algorithm for continuous time GARCH diffusion limit stochastic volatility models and demonstrate the performance of our algorithm through simulation experiments and empirical analyses. Our algorithm exploits the normal distribution approximation of the posterior density of conditional variance using the one-step Newton-Raphson algorithm. Our algorithm can be applied not only to the continuous time GARCH diffusion limit stochastic volatility model but also to the continuous time stochastic volatility models of which the marginal probability density functions or the probability kernels of them are known. We present an empirical analysis results of the Feller square-root stochastic volatility model as well as the continuous time GARCH diffusion limit stochastic volatility model as an exhibition of the generality of our MCMC algorithm.

Keywords continuous time GARCH diffusion limit stochastic volatility model, Markov chain Monte Carlo algorithm, one-step Newton-Raphson algorithm, Feller square-root stochastic volatility model

JEL Classification C11, C12, C22

*Corresponding Author, Add: S3–512 Hanbat National University, Dongseodaero 125 Youso-
engu Daejeon, Tel: 042 821 1331, Fax: 042 821 1597, E-mail: jmpark@hanbat.ac.kr

GARCH 극한 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론

김태형 박정민*

Abstract 본 연구는 연속시간 GARCH 극한 확률변동성모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘과 알고리즘의 성과에 대한 모의실험 결과, 그리고 실증분석 결과를 제시한다. 본 연구의 알고리즘은 1단계-NR알고리즘(one-step Newton-Raphson algorithm)을 이용한 조건부분산 사후확률밀도함수에 대한 정규분포근사를 이용한다. 본 연구의 알고리즘은 GARCH 극한 확률변동성모형 뿐만 아니라 조건부분산의 주변확률밀도함수 또는 주변확률밀도함수의 확률커널(probability kernel)을 알 수 있는 연속시간 확률변동성모형 추정에 적용될 수 있다. 본 연구의 MCMC알고리즘의 일반성에 대한 예시로 GARCH 극한 확률변동성모형과 함께 Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 실증분석 결과를 제시한다.

Keywords 연속시간 GARCH 극한 확률변동성모형, MCMC알고리즘(Markov Chain Monte Carlo algorithm), 1단계-NR알고리즘(one-step Newton-Raphson algorithm), Feller제곱근 확률변동성모형

JEL Classification C11, C12, C22

*교신저자 : 대전 유성구 동서대로 125 한밭대학교 S3동 512호, 전화: 042 821 1331, Fax: 042 821 1597 E-mail: jmpark@hanbat.ac.kr

1. 서론

자산가격 수익률이 가지는 전형적인 특징인 수익률분포의 두꺼운 꼬리와 변동성집중(volatility clustering)을 설명하기 위한 모형으로 GARCH모형(generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models)은 실증분석에 가장 자주 이용되는 모형이다. GARCH모형은 조건부분산을 전기의 분산과 전기수익률의 확정함수(deterministic function)로 설정하므로 추정에 필요한 우도함수를 쉽게 얻을 수 있다는 장점이 있다. 시변조건부분산을 설명하는 다른 모형으로는 독자적인 교란항을 가지는 확률변동성모형이 있다. 확률변동성모형의 경우, 조건부분산이 미관측상태변수(latent state variables)로 설정된다. 따라서 모형추정에 필요한 우도함수를 얻기 위해 미관측상태변수를 적분소거(integrating-out)해야 하므로 추정이 쉽지 않다.

Nelson (1990), Drost and Werker (1996), Duan (1997) 등은 관측 시간간격이 0으로 수렴할 때 이산시간 GARCH모형이 연속시간 확률변동성모형으로 수렴한다는 결과를 제시하였다. 이러한 결과는 이산시간 GARCH모형 추정치를 이용하여 연속시간 확률변동성모형 파라미터 추정치를 얻을 수 있음을 의미한다. 일반적으로 이산시간 확률변동성모형보다 연속시간 확률변동성모형 추정이 더 어렵기 때문에 GARCH모형 추정치를 이용하여 연속시간 극한과정의 확률변동성모형 파라미터 추정치를 얻을 수 있다는 점은 매우 중요한 장점이 될 수 있다. Ritchken and Trevor (1999), Cvsa and Ritchken (2001), Swishchuck (2013) 등은 GARCH모형 추정치를 이용하여 얻은 연속시간 확률변동성모형 파라미터 추정치를 옵션가격결정과 채권가격결정에 이용하였다. 그러나 이산시간 GARCH모형과 그 극한과정인 연속시간 확률변동성모형에 대한 통계적 추론은 동일하지 않다(Wang (2002)).

일반적으로 이산시간 관측 자료의 전이확률밀도함수를 알 수 없으므로 연속시간 확률변동성모형 추정이 이산시간 확률변동성모형 추정보다 어렵다. 연속시간 확률변동성모형이 지수선형의 조건부특성함수를 가지는 지수선형과정을 따르는 모형들의 경우 특성함수를 이용한 다양한 추정법들이 제시되었다(Singleton (2001), Jiang and Knight (2002), Chacko and Viceira (2003) 등). 그러나 이러한 추정법들은 지수선형의 특성함수를 가지지 않는 확률변동성모형 추정에 이용할 수 없다. Ait-Sahalia and Kimmel (2007), Ait-Sahalia (2008) 등은 옵션가격으로부터 구한 내재변동성과 같은 변동성 대용치들이 이용 가능한 경우, Ait-Sahalia (2002)의 Hermite다항식을 이용한 우도함수 근사 방법을 다변량모형으로 확장하는 추정법을 제시하였다. 그러나 변동성을 미관측상태변수로 설정한 모형에 이러한 우도함수 근사 방법을 적용하기 어

럽다. 고전적 접근법의 일반적인 연속시간 확률변동성모형 추정법으로는 Gallant and Tauchen (1996)의 EMM, Duffie and Singleton (1993)의 MSM(method of simulated moments), Gouriéroux *et al.* (1993)의 II(indirect inference) 등과 Durham and Gallant (2002)의 SML(simulated maximum likelihood)추정법 등이 있다. 베이지언 접근법의 추정법으로는 Elerian *et al.* (2001), Eraker (2001), Roberts and Stramer (2001), Jones (2003), Johannes and Polson (2009) 등의 MCMC(Markov Chain Monte Carlo)를 이용한 베이지언 추정법이 있다. 이러한 추정법들은 공통적으로 시뮬레이션 기반 추정법이라는 특징을 가지고 있다. 또한 이들 시뮬레이션기반 추정법들은 연속시간모형의 오일러이산화모형을 이용하여 이산시간 관측치의 전이확률밀도함수를 근사하는 방법을 이용하고 있다. 특히 베이지언 접근법에서는 오일러이산화에 따른 이산화편의(discretization bias)를 줄이기 위해 관측시점 사이의 값들을 생성하는 방법(data augmentation)들이 공통적으로 이용되고 있다.

Jones (2003)은 GARCH(1,1)모형의 연속시간 극한과정을 포함하는 CEV 형태의 확산함수를 가지는 연속시간 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론 알고리즘을 제시하였다. 그러나 Jones (2003)은 관측시점 사이의 값들을 생성하는 방법에 초점을 두고 있을 뿐만 아니라 MH알고리즘(Metropolis-Hasting algorithm)의 후보생성확률밀도함수(candidate generating density)로 조건부분산의 사전확률밀도함수를 이용한다는 점에서 효율적인 추정법으로 보기 어렵다. Ignatieva *et al.* (2015)에서도 조건부분산의 사전확률밀도함수를 MH알고리즘의 후보생성확률밀도함수로 이용하고 있다. 연속시간 확률변동성모형 추정에서 이용 가능한 관측 자료를 이용하여 모형을 추정할 때 이산화편의가 심각하지 않은 경우라면 오일러이산화 모형을 추정하는 방법으로 연속시간 모형을 추정할 수 있다. Eraker *et al.* (2003)은 일간자료와 같은 고빈도자료를 이용하는 경우 오일러이산화에 따른 편의가 무시할 수 있을 정도로 작다는 모의실험결과를 제시하였다.

본 연구는 GARCH 극한 확률변동성모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘을 제시한다. 본 연구의 1단계-NR알고리즘(1-step Newton-Raphson algorithm)을 이용한 조건부분산 사후확률밀도함수에 대한 정규분포근사는 GARCH 극한 확률변동성모형 뿐만 아니라 조건부분산의 주변확률밀도함수 또는 주변확률밀도함수의 확률커널(probability kernel)을 알 수 있는 연속시간 확률변동성모형의 오일러이산화 모형에 적용할 수 있는 일반적인 방법이다. 기존 연구들에서는 레버리지 효과 또는 volatility-in mean과 같은 특정 모형에만 적용되는 알고리즘이 제시되었다는 점에서 본 연구에서 제시하는 알고리즘은 매우 일반적이라 할 수 있다. 예외적인 경우를 제외하면, 일반적인 연속시간 확률변

동성모형의 조건부분산을 한꺼번에 사후표본추출할 수 있는 방법은 현재까지 알려져 있지 않다¹. 이와 같은 점을 고려하면, 본 연구에서 제시하는 조건부분산의 사후분포 근사 방법을 이용하여 기존 연구에서 제시된 다양한 연속시간 확률변동성모형을 추정할 수 있다는 점은 매우 중요한 본 연구의 기여가 될 것이다. 이와 같은 본 연구가 제안하는 알고리즘의 일반성을 보여주기 위해, 본 연구는 GARCH 극한 확률변동성모형과 함께 Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 실증분석 결과를 제시한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2절에 GARCH 극한 연속시간 확률변동성모형에 대한 논의와 함께 이산시간 GARCH모형 파라미터 추정치와 연속시간 극한 확률변동성모형 파라미터와의 관계, 그리고 추정을 위한 오일러이산화 모형을 제시한다. 3절에서 확률변동성모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘을 제시하고 1단계-NR알고리즘(1-step Newton-Raphson algorithm)을 이용한 조건부분산 사후확률밀도함수 근사방법으로 추정할 수 있는 기존 연구의 연속시간 확률변동성모형들을 살펴본다. 4절에서는 모의실험과 기존연구에서 분석된 자료에 대한 비교실증분석을 통해 본 연구에서 제안한 MCMC알고리즘의 성과를 살펴본다. 그리고 실증분석 예시로 5절에 2001년 1월 3일 ~ 2014년 12월 30일 기간의 일간 KOSPI200 지수 수익률 자료에 대한 실증분석 결과와 고전적 접근법의 모형 진단과 모형 비교 결과를 제시하였다. 마지막으로 6절에 결론이 제시된다.

2. GARCH 극한 연속시간 확률변동성모형

(1) 이산시간 GARCH모형의 연속시간 극한 과정

Nelson (1990)은 GARCH(1,1)모형의 연속시간 극한 확산과정(continuous time limit diffusion process)을 제시하였다. Duan (1997), Fornari and Mele (2000, 2006) 등은 Nelson (1990)의 접근법을 보다 확장하여 다양한 GARCH모형의 연속시간 극한과정을 제시하였다. 특히 Duan (1997)에서 제시된 GARCH모형의 연속시간 확산과정 중 Engle and Ng (1993)의 NAGARCH(1,1)모형에 대한 연속시간 확산과정이 파생상품가격결정에 자주 이용되고 있다. Engle and Ng (1993)의 NAGARCH(1,1)모형은 다음과 같다.

¹ 최근 Gong and Stoffer (2021)은 Lindsten *et al.* (2014)의 CPF-AS(conditional particle filter with ancestor sampling) 알고리즘을 이용하여 로그조건부분산을 한꺼번에 표본추출하는 알고리즘이 제안하였다. 그러나 상태변수를 표본추출하기 위하여 파티클필터를 이용한다는 점에서 계산상의 부담이 큰 표본추출 방법이다. 파라미터값이 주어졌을 때, 로그우도함수를 계산하기 위해 파티클필터를 이용할 때는 한 번만 파티클필터를 이용한다. 그러나 베이지언 추론에서는 반복적으로 파티클필터를 이용하여 상태변수를 표본추출하므로 계산상의 부담이 매우 크다.

$$\begin{cases} r_t = \sigma_{t-1} \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_0 (r_{t-1} - \gamma_0 \sigma_{t-1})^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2 \\ \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0,1) \end{cases} \quad (2.1)$$

여기에서 $r_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$, $\omega_0 > 0, \alpha_0 \geq 0, \beta_0 \geq 0, \alpha_0(1 + \gamma_0)^2 + \beta_0 < 1$ 이며, S_t 는 t 시점의 자산가격, 그리고 $i.i.d.N(0,1)$ 은 독립적이고 동일한 분포를 따르는 표준정규분포를 나타낸다. 식 (2.1)의 모형은 양과 음의 수익률 충격이 다음 기의 조건부분산에 비대칭적인 영향을 미치는 전형적인 특징을 설명할 수 있다. 식 (2.1)의 NAGARCH(1,1)모형의 연속시간 극한 확산과정은 다음과 같다.

$$\begin{cases} d \ln S_t = \sigma_t dW_{1t} \\ d \sigma_t^2 = (\omega - \kappa \sigma_t^2) dt + \xi \sigma_t^2 dW_{2t} \\ \sigma_0^2 \sim IG\left(\frac{1+2\kappa}{\xi^2}, \frac{2\omega}{\xi^2}\right) \\ E[dW_{1t}dW_{2t}] = \rho dt \end{cases} \quad (2.2)$$

여기에서 κ 는 평균회귀속도, ω/κ 장기평균을, $\{W_{it}, i = 1, 2\}$ 는 표준위너과정을 나타내며, $IG(a, b)$ 는 형태파라미터가 a 이고 스케일파라미터가 b 인 역감마 분포(inverse gamma distribution)를 나타낸다. σ_t^2 의 주변확률분포가 존재하기 위해서는 $\frac{1+2\kappa}{\xi^2} > 0, \frac{2\omega}{\xi^2} > 0$ 의 제약이 충족되어야 한다. 식 (2.2)는 위너과정들이 서로 독립이 아니라는 점에서 Nelson (1990)의 GARCH(1,1)모형의 연속시간 극한 확산과정과 구분된다. Ritchken and Trevor (1999), Cvsa and Ritchken (2001), Fornari and Mele (2000), Swishchuck (2013) 등은 다양한 GARCH(1,1) 모형 추정치를 연속시간 극한 과정의 추정치로 변환하여 파생상품 가격결정에 이용하였다. 관측시간간격을 h 라 하면, 식 (2.1)의 NAGARCH(1,1)모형의 파라미터와 식 (2.2)의 연속시간 극한 확률변동성모형의 파라미터는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\begin{cases} \omega = \frac{\omega_0}{h^2} \\ \kappa = \frac{1 - \alpha_0(1 + \gamma_0^2) - \beta_0}{h} \\ \xi = \alpha \sqrt{\frac{k - 1 + 4\gamma_0^2}{h}} \\ \rho = \frac{-2\gamma_0}{k - 1 + 4\gamma_0^2} \end{cases} \quad (2.3)$$

여기에서 κ 는 ε_t 의 첨도(kurtosis)를 나타낸다. 따라서 정규분포를 가정하는 경우, $\kappa = 3$ 이다. 식 (2.3)의 관계는 일반적으로 식 (2.2) 연속시간모형의 파라미터를 연율표시로 나타내는 점(annualized parameters)을 반영한 것이다. 식 (2.3)의 관계는 식 (2.1)의 이산시간 NAGARCH(1,1)모형 추정치를 이용하여 식 (2.2)의 연속시간 확률변동성모형의 파라미터 추정치를 얻을 수 있음을 의미한다. 그러나 Wang (2002)은 Le Cam (1986)의 'deficiency distance'를 이용하여 이산시간 GARCH모형(1,1)에 대한 통계적 추론과 그 연속시간 극한 모형에 대한 통계적 추론은 점근적으로 동일하지 않음을 보였다. 이는 GARCH(1,1)모형과 연속시간 극한 모형에서 충격 전달 매커니즘이 서로 다른 것에 따른 것이다. 따라서 식 (2.3)의 관계를 이용하여 얻은 연속시간모형의 파라미터추정치를 파생상품 가격결정에 이용하고자 한다면 이러한 한계점을 고려하는 것이 바람직하다.

Heston and Nandi (2000)은 이산시간 GARCH(1,1) 모형의 연속시간 극한 과정이 Feller제곱근과정을 따르는 다음과 같은 GARCH모형을 제시하였다.

$$\begin{cases} r_t = \mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sigma_t\varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_0(\varepsilon_{t-1} - \gamma_0\sigma_{t-1})^2 + \beta_0\sigma_{t-1}^2 \\ \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, 1) \end{cases} \quad (2.4)$$

식 (2.4)의 연속시간 극한 과정은 다음과 같다.

$$\begin{cases} d\ln(S_t) = \mu_t dt + \sqrt{V_t}dW \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW \end{cases} \quad (2.5)$$

식 (2.2)와 달리 식 (2.5)에는 하나의 위너과정이 수익률과 조건부분산 방정식에 공통적으로 나타나고 있다. Christoffersen *et al.* (2006)은 Heston and Nandi (2000) 모형을 일반화하여 역가우시언분포(inverse Gaussian distribution)를 가지는 GARCH(1,1)모형을 제시하였다. 물론 조건부분산 방정식의 연속시간 극한과정은 Feller제곱근과정을 따른다.

Corradi (2000)에서 지적된 바와 같이 이산시간 GARCH모형의 연속시간 극한 과정은 유일하지 않다. 또한 Duan (1997)에서 제시된 바와 같이 서로 다른 이산시간 GARCH모형이 동일한 형태의 연속시간 극한과정으로 수렴한다. 따라서 이산시간 GARCH모형 추정치를 연속시간극한 과정의 파라미터 추정치로 이용하고자 한다면 이러한 이산시간 GARCH모형과 연속시간 모형과의 관계를 고려하는 것이 필요하다.

최근 이산시간 GARCH모형과 동일한 특성을 가지는 다양한 연속시간 GA-

RCH모형들이 제시되고 있다(Klüppelberg *et al.* (2004), Brockwell *et al.* (2006), Haug *et al.* (2007) 등). Lindner (2009)는 이산시간 GARCH모형과 연속시간 확률변동성모형의 근사 관계에 대한 보다 자세한 논의를 제시하였다. 본 연구는 식 (2.6)의 모형에 대한 베이지언 추론 알고리즘을 제시하는데 초점을 두고 있으므로 연속시간 GARCH모형에 대한 논의는 더 이상 하지 않기로 한다.

(2) 연속시간 GARCH 극한 확률변동성모형

식 (2.2)을 다음과 같이 일반화할 수 있다.

$$\begin{cases} d\ln S_t = (\mu^s + \delta V_t)dt + \sqrt{V_t}dW_{1t} \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma V_t dW_{2t} \\ E[dW_{1t}dW_{2t}] = \rho dt \\ V_0 = IG\left(1 + \frac{2\kappa}{\sigma^2}, \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\right) \end{cases} \quad (2.6)$$

식 (2.6)은 수익률방정식의 추세함수를 조건부분산 V_t 선형함수로 설정한 것이다. 식 (2.6)의 Δ 시간간격 오일러이산화모형을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} r_t = \mu^\Delta + \delta v_t + \sqrt{v_t}\varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, 1) \\ v_{t+1} = \mu + \phi(v_t - \mu) + \sigma_\eta v_t \eta_t, \eta_t \sim N(0, 1), \forall v_t > 0 \\ v_1 \sim IG\left(1 + \frac{2(1-\phi)}{\sigma_\eta^2}, \frac{2(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2}\right) \\ \text{corr}[\varepsilon_t, \eta_t] = \rho \end{cases} \quad (2.7)$$

여기에서 $\mu = \theta\Delta$, $\phi = 1 - \kappa\Delta$, $\sigma_\eta = \sigma\sqrt{\Delta}$ 이며, $\forall v_t > 0$ 은 오일러이산화한 조건부분산이 항상 양임을 의미하는 제약조건이다. v_t 의 안정성과 주변확률분포의 존재를 위해서는 $\mu > 0$, $|\phi| < 1$ 의 제약조건이 충족되어야 한다. 일간자료와 같은 고빈도자료의 경우 이산화편의가 무시할 수 있을 정도로 작다는 것이 알려져 있다(Eraker *et al.* (2003)). 따라서 이하에서는 식 (2.7)의 모형을 중심으로 베이지언 추론 방법을 논의하기로 한다.

3. GARCH 극한 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론 알고리즘

(1) 사전확률분포

식 (2.7) 모형에 대한 베이지언 추론을 위해 다음과 같은 파라미터에 대한 사전확률밀도함수를 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} \pi(\mu^\Delta) = N(\underline{b}_{\mu^\Delta}, \underline{B}_{\mu^\Delta}) \\ \pi(\delta) = N(\underline{b}_\delta, \underline{B}_\delta) \\ \pi(\mu) = TN_{(0, \infty)}(\underline{b}_\mu, \underline{B}_\mu) \\ \pi(\phi) = TN_{(-1, 1)}(\underline{b}_\phi, \underline{B}_\phi) \end{cases} \quad (3.1)$$

여기에서 $N(a, b)$ 와 $N_{(c, d)}(a, b)$ 는 각각 평균이 a 이고 분산이 b 인 정규분포와 하한과 상한이 각각 c 와 d 인 절단정규분포(truncated normal distribution)를 나타낸다. μ 와 ϕ 의 사전확률밀도함수에 부과된 $\{\mu > 0, |\phi| < 1\}$ 의 제약조건은 조건부분산의 장기평균이 항상 양이라는 제약과 조건부분산과정의 안정성과 역감마분포의 비조건부분포 존재를 위한 제약조건이다. $(\varepsilon_t, \tilde{\eta} = \sigma_\eta \eta_t)'$ 의 제약하의 공분산행렬에 포함된 파라미터 $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 을 사후표본추출하기 위해 본 연구는 Jacquier *et al.* (2004)에서 제시된 방법을 이용하기로 한다. Jacquier *et al.* (2004)는 $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 을 표본추출하기 위해 $\sigma_\eta \eta_t = \psi \varepsilon_t + \omega e_t$, $e_t \sim N(0, 1)$ 의 회귀식을 이용하는 방법을 제시하였다. 이 회귀식에서 $\psi = \rho \sigma_\eta$, $\omega^2 = (1 - \rho^2) \sigma_\eta^2$ 이다. $\{\psi, \omega^2\}$ 을 사후표본추출할 수 있다면, $\rho = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + \omega^2}}$, $\sigma_\eta^2 = \psi^2 + \omega^2$ 의 일대일 대응관계를 이용하여 $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 의 사후표본을 생성할 수 있다. 이를 위해 다음과 같이 $\{\psi, \omega^2\}$ 의 사전확률밀도함수를 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} \pi(\psi, \omega^2) = \pi(\psi|\omega^2)\pi(\omega^2) \\ \pi(\psi|\omega^2) = N(0, \omega^2 \underline{B}_\psi), \pi(\omega^2) = IG(d_0/2, s_0/2) \end{cases} \quad (3.2)$$

(2) 사후표본추출

식 (3.1), 식 (3.2)와 같이 사전확률밀도함수를 설정하면 식 (2.13) 모형에 대한 베이지언 추론을 할 수 있다. 베이즈정리를 이용하여 확률변동성모형의 파라미터 $\Psi = (\mu^\Delta, \delta, \mu, \phi, \psi, \omega^2)$ 와 미관측상태변수인 조건부분산 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 의 결합사후확률밀도함수(joint posterior probability density function)를 다음과

같이 우도함수와 사전확률밀도함수의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\pi(\Psi, \{v_t\}_{t=1}^T | \{r_t\}_{t=1}^T) \propto p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \left\{ \prod_{t=1}^{T-1} p(r_t, v_{t+1} | v_t, \Psi) \right\} p(r_T | v_T, \mu^\Delta, \delta) \pi(\Psi) \quad (3.3)$$

여기에서 $\pi(\Psi) = \pi(\mu^\Delta) \pi(\delta) \pi(\mu) \pi(\phi) \pi(\psi, \omega^2)$ 이다. 식 (3.3)으로부터 한꺼번에 $\Psi = \{\mu^\Delta, \delta, \mu, \phi, \psi, \omega^2\}$ 와 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 의 사후표본을 생성할 수 없으므로 식 (2.13) 모형에 대한 베이지언 추론은 다음과 같은 사후조건부확률밀도함수로부터 순차적으로 사후표본을 생성하는 것을 반복하는 것이 된다.

- (i) $\pi(\{v_t\}_{t=1}^T | \{r_t\}_{t=1}^T, \Psi)$
- (ii) $\pi(\Psi | \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T)$

■ 조건부분산 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 의 사후표본추출

조건부분산의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi(\{v_t\}_{t=1}^T | \{r_t\}_{t=1}^T, \Psi) \propto p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \left\{ \prod_{t=1}^{T-1} p(r_t, v_{t+1} | v_t, \Psi) \right\} p(r_T | v_T, \mu^\Delta, \delta) \quad (3.4)$$

식 (3.4)로부터 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 를 한꺼번에 표본추출하는 것이 어려우므로, 한 번에 하나씩 표본추출하는 방법을 이용할 수 있다². 이 경우 $t = 1, t = 2, \dots, T - 1$ 그리고 $t = T$ 시점을 구분하여 사후조건부확률밀도함수를 유도하는 것이 필요하다. $\{r_t, v_{t+1}\}$ 이 결합 마르코프(joint markov) 성질을 가지는 모형의 특성이 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 의 사후조건부확률밀도함수 유도에 이용된다. 조건부분산을 사후표본추출할 때 파라미터는 주어진 것이므로 이하의 조건부분산 표본추출에 관한 논의에서 파라미터를 생략하기로 한다.

²본 연구에서는 한 번에 하나씩 v_t 를 표본추출하는 SMS(single-move sampling)을 제안한다. 이하에서 제시되는 SMS는 조건부분산의 확률과정이 3.3의 Table 1에 수록된 다양한 확률과정을 따르는 모형에도 쉽게 준용할 수 있는 유연한 표본추출방법이다. 김태형·박정민 (2017)은 로그조건부분산이 AR(1)과정을 따르는 확률변동성모형의 상태변수 표본추출에 본 연구에서와 유사한 방법을 이용하는 알고리즘을 제시한 바 있다. 본 연구의 알고리즘은 조건부분산이 일반적인 확률과정을 따르는 모형으로 김태형·박정민 (2017)의 알고리즘을 일반화한 것이다. 계산상의 부담과 소요시간을 고려하지 않는다면 SMS는 복수의 조건부분산을 한 번에 표본추출하는 MMS(multi-move sampling)보다 표본추출의 효율성이 작다. 계산상의 부담과 소요시간을 고려하면 MMS가 반드시 SMS보다 효율적인 것으로 볼 수 없다. ESS(effective sample size) 또는 IF(inefficiency factor)로 측정된 동일한 유효 사후표본을 얻는데 소요되는 시간을 비교하면 SMS가 MMS보다 효과적인 경우를 쉽게 볼 수 있다. ESS와 IF를 이용하여 로그조건부분산이 AR(1)과정을 따르는 모형에 대한 추론에 SMS와 MMS를 이용하는 경우를 비교해보면 이를 쉽게 확인할 수 있다.

• $t = 1$

$t = 1$ 시점의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi(v_1|r_1, v_2) \propto p(v_1)p(r_1, v_2|v_1) \quad (3.5)$$

식 (3.5)에서 우변의 첫 번째 항은 역감마분포의 확률밀도함수이므로 최빈값(mode)에서 2차 테일러전개를 이용하여 정규분포로 근사할 수 있다. 두 번째 항의 경우에도 1단계-NR알고리즘(1-step Newton-Raphson algorithm)을 이용하여 정규분포로 근사할 수 있다. 1단계-NR알고리즘을 이용하기 위해 후보점을 선택하는 것이 필요하다. 식 (3.5)의 우변의 첫 번째 항은 v_1 의 사전확률밀도함수에 해당한다. 따라서 v_1 의 예측치로 볼 수 있는 사전확률밀도함수의 평균 또는 최빈값을 후보점으로 이용하는 1단계-NR알고리즘으로 두 번째 항을 근사하는 정규분포 확률커널(probability kernel)을 얻을 수 있다. 즉, $\ln p(r_1, v_2|v_1)$ 에 1단계-NR알고리즘을 적용하여 $\ln p(r_1, v_2|v_1)$ 을 근사하는 정규분포 확률커널을 얻을 있다. 이를 이용하면, 다음과 같이 식 (3.5)의 각 항을 정규분포로 근사할 수 있다.

$$\begin{cases} p(v_1) \approx N(m_1, M_1) \\ p(r_1, v_2|v_1) \approx N\left(v_1|\hat{v}_1 = m_1 + \hat{\Sigma}_{v_1} \left[\frac{\partial \ln p(r_1, v_2|v_1)}{\partial v_1} \Big|_{v_1=m_1} \right], \hat{\Sigma}_{v_1} \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

여기에서 $m_1 = \frac{(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2 + (1-\phi)}$, $M_1 = \left[-\frac{\partial^2 \ln p(v_1)}{\partial v_1^2} \Big|_{v_1=m_1} \right]^{-1} = \left(\frac{(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2 + (1-\phi)} \right)^2 \left(\frac{\sigma_\eta^2}{4\sigma_\eta^2 + 2(1-\phi)} \right)$, $\hat{\Sigma}_{v_1} = \left[-\frac{\partial^2 \ln p(r_1, v_2|v_1)}{\partial v_1^2} \Big|_{v_1=m_1} \right]^{-1}$ 이다. 식 (3.6)에서 첫 번째 근사식은 역감마분포의 최빈값에서 근사한 정규분포를 나타낸다. 합성곱의 법칙(convoluton rule)을 이용하여 식 (3.6)의 근사분포들을 결합한 다음 비음의 제약을 부과하면, 다음과 같은 v_1 의 사후조건부확률밀도함수에 대한 절단정규분포 근사를 얻을 수 있다.

$$q(v_1) = TN_{(0, \infty)} \left(\bar{M}_1 \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{\hat{v}_1}{\hat{\Sigma}_{v_1}} \right), \bar{M}_1 \right) \quad (3.7)$$

여기에서 $\bar{M}_1 = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\hat{\Sigma}_{v_1}} \right)^{-1}$ 이다.

식 (3.7)을 후보생성확률밀도함수로 이용하는 ARMH알고리즘(acceptance-rejection Metropolis-Hastings algorithm)으로 v_1 을 사후표본추출할 수 있다 (Tierney (1994), Chib and Greenberg (1995)). ARMH알고리즘은 사후표본추출의

효율성을 높이기 위해 MH알고리즘과 기각표본추출법(acceptance-rejection sampling)을 결합하여 표본추출하는 방법이다³. 기각표본추출법(rejection sampling)으로 생성한 후보표본 v_1^* 를 MH채택확률(Metropolis-Hasting acceptance probability)로 채택하면 된다. 기각표본추출법과 MH알고리즘의 채택확률은 각각 다음과 같다.

$$\alpha_{AR}(v_1^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_1^*|r_1, v_2)}{q(v_1^*)} \right\} \quad (3.8)$$

$$\alpha_{ARMH}(v_1, v_1^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_1^*|r_1, v_2) \min \{ \pi(v_1|r_1, v_2), q(v_1) \}}{\pi(v_1|r_1, v_2) \min \{ \pi(v_1^*|r_1, v_2), q(v_1^*) \}} \right\}$$

ARMH알고리즘을 이용하지 않고, 식 (3.7)을 후보생성확률밀도함수로 가지는 MH알고리즘(Metropolis-Hastings algorithm)을 이용할 수도 있다. 본 연구에서 ARMH알고리즘을 이용하는 목적은 사후표본추출의 효율성을 높이기 위함이다.

• $t = 2, \dots, t = T - 1$

$t = 2, \dots, t = T - 1$ 시점의 v_t 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi(v_t|r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}) \propto p(r_t, v_{t+1}|v_t)p(r_{t-1}, v_t|v_{t-1}) \quad (3.9)$$

식 (3.9)에서 v_t 의 사전확률밀도함수에 해당하는 우변의 두 번째 항은 다음과 같은 정규분포로 나타낼 수 있다.

$$p(r_{t-1}v_t|v_{t-1}) = N \{ \hat{m}_t, \hat{M}_t \} \quad (3.10)$$

여기에서 $\hat{m}_t = \mu + \phi(v_{t-1} - \mu) + \rho\sigma_\eta\sqrt{v_{t-1}}(r_{t-1} - \mu^\Delta - \delta v_{t-1})$, $\hat{M}_t = (1 - \rho^2)\sigma_\eta^2 v_{t-1}$ 이다. 그리고 1단계-NR알고리즘으로 식 (3.9)의 첫 번째 항을 정규분포로 근사할 수 있다. 즉, $\ln p(r_t, v_{t+1}|v_t)$ 에 1단계-NR알고리즘을 적용하면, $\ln p(r_t, v_{t+1}|v_t)$ 을 근사하는 정규분포 확률커널을 얻을 수 있다. 이 때, 1단계-NR알고리즘 적용을 위한 후보점 m_t 를 다음과 같이 선택할 수 있다.

$$m_t = \hat{m}_t + \sqrt{\hat{M}_t} \frac{\phi(a_t)}{1 - \Phi(a_t)} \quad (3.11)$$

³ARMH알고리즘은 Shephard and Pitt (1997), Jacquier *et al.* (2004), Watanabe (2000) 등에서 로그조건부분산을 생성하는 방법으로 이용되었다.

여기에서 $\phi(\cdot)$ 과 $\Phi(\cdot)$ 은 각각 표준정규분포의 확률밀도함수함수와 누적확률 밀도함수이며, $a_t = -\frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\bar{M}_t}}$ 이다. 후보점으로 식 (3.10)의 평균 \hat{m}_t 를 이용하지 않는 것은 양의 확률로 $\hat{m}_t \leq 0$ 이 될 수 있기 때문이다. 식 (3.11)의 후보점은 조건 부분산이 비음이라는 제약을 반영한 절단정규분포의 평균을 나타낸다. $t = 1$ 기에서와 마찬가지로 1단계-NR알고리즘으로 다음과 같이 $p(r_t, v_{t+1}|v_t, \Psi)$ 을 근사하는 정규분포 확률커널을 얻을 수 있다.

$$p(r_t, v_{t+1}|v_t) \approx N\left(\hat{v}_t = m_t + \hat{\Sigma}_{v_t} \left[\frac{\partial \ln p(r_t, v_{t+1}|v_t)}{\partial v_t} \Big|_{v_t=m_t} \right], \hat{\Sigma}_{v_t}\right) \quad (3.12)$$

여기에서 $\hat{\Sigma}_{v_t} = \left[-\frac{\partial^2 \ln p(r_t, v_{t+1}|v_t)}{\partial v_t^2} \Big|_{v_t=m_t} \right]^{-1}$ 이다. 식 (3.10)과 식 (3.12)를 결합하고 비음의 제약을 부과하면, 다음과 같은 v_t 의 사후조건부확률밀도함수에 대한 절단정규분포 근사를 얻을 수 있다.

$$q(v_t) = TN_{(0, \infty)}\left(\bar{M}_t \left(\frac{m_t}{\bar{M}_t} + \frac{\hat{v}_t}{\hat{\Sigma}_{v_t}} \right), \bar{M}_t\right) \quad (3.13)$$

여기에서 $\bar{M}_t = \left(\frac{1}{\bar{M}_t} + \frac{1}{\hat{\Sigma}_{v_t}} \right)^{-1}$ 이다. $t = 1$ 기에서와 같이 식 (3.13)을 후보생성확률밀도함수로 이용하는 ARMH알고리즘으로 v_t 의 사후표본을 생성할 수 있다. ARMH알고리즘의 기각표본추출법과 MH알고리즘의 채택확률은 각각 다음과 같다.

$$\alpha_{AR}(v_t^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_t^*|r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1})}{q(v_t^*)} \right\} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{ARMH}(v_t, v_t^*) \\ &= \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_t^*|r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}) \min \{ \pi(v_t|r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}), q(v_t) \}}{\pi(v_t|r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}) \min \{ \pi(v_t^*|r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}), q(v_t^*) \}} \right\} \end{aligned}$$

• $t = T$

v_t 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi(v_T|v_{T-1}, r_T, r_{T-1}) \propto p(r_T|v_T)p(r_{T-1}, v_T|v_{T-1}) \quad (3.15)$$

$t = 2, \dots, t = T - 1$ 시점에서와 마찬가지로 식 (3.15)의 우변의 두 번째 항은

다음과 같은 정규분포로 나타낼 수 있다.

$$p(r_{T-1}, v_T | v_{T-1}) = N(\hat{m}_T, \hat{M}_T) \quad (3.16)$$

여기에서 $\hat{m}_T = \mu + \phi(v_{T-1} - \mu) + \rho\sigma_\eta\sqrt{v_{T-1}}(r_{T-1} - \mu^\Delta - \delta v_{T-1})$, $\hat{M}_T = (1 - \rho^2)\sigma_\eta^2 v_{T-1}$ 이다. 그리고 $\ln p(r_T | v_T, \mu^\Delta, \delta)$ 에 1단계-NR알고리즘을 적용하기 위한 후보점을 다음과 같이 선택할 수 있다.

$$m_T = \hat{m}_T + \sqrt{\hat{M}_T} \frac{\phi(a_T)}{1 - \Phi(a_T)} \quad (3.17)$$

여기에서 $a_T = -\frac{\hat{m}_T}{\sqrt{\hat{M}_T}}$ 이다. 그리고 1단계-NR알고리즘으로 식 (3.15)의 우변 첫 번째 항을 근사하는 다음과 같은 정규분포 확률커널을 얻을 수 있다.

$$p(r_T | v_T, \mu^\Delta, \delta) \approx N\left(\hat{v}_T = m_T + \hat{\Sigma}_{v_T} \left[\frac{\partial \ln p(r_T | v_T)}{\partial v_T} \Big|_{v_T=m_T} \right], \hat{\Sigma}_{v_T}\right) \quad (3.18)$$

여기에서 $\hat{\Sigma}_{v_T} = \left[-\frac{\partial^2 \ln p(r_T | v_T)}{\partial v_T^2} \Big|_{v_T=m_T} \right]^{-1}$ 이다. 식 (3.16)과 식 (3.18)을 결합한 후 비음 제약을 부과하면, 다음과 같은 후보생성확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$q(v_T) = TN_{(0, \infty)}\left(\bar{M}_T \left(\frac{m_T}{\hat{M}_T} + \frac{v_T^*}{\hat{\Sigma}_{v_T}} \right), \bar{M}_T\right) \quad (3.19)$$

여기에서 $\bar{M}_T = \left(\frac{1}{\hat{M}_T} + \frac{1}{\hat{\Sigma}_{v_T}} \right)^{-1}$ 이다. 서와 마찬가지로 식 (3.19)를 후보생성확률 밀도함수로 이용하는 ARMH알고리즘으로 v_T 의 사후표본을 생성할 수 있다. ARMH알고리즘의 기각표본추출법과 MH알고리즘의 채택확률은 각각 다음과 같다.

$$\alpha_{AR}(v_T^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_T^* | r_T, r_{T-1}, v_{T-1})}{q(v_T^*)} \right\} \quad (3.20)$$

$$\alpha_{ARMH}(v_T, v_T^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_T^* | r_T, r_{T-1}, v_{T-1}) \min \{ \pi(v_T | r_T, r_{T-1}, v_{T-1}), q(v_T) \}}{\pi(v_T | r_T, r_{T-1}, v_{T-1}) \min \{ \pi(v_T^* | r_T, r_{T-1}, v_{T-1}), q(v_T^*) \}} \right\}$$

이상에서 논의한 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 의 사후표본추출 과정에서 공통적으로 다루기 어

려운 부분에 해당하는 $p(r_t, v_{t+1}|v_t, \cdot)$ ($p(r_1, v_2|v_1, \cdot)$ 또는 $p(r_T|v_T, \cdot)$)의 로그확률밀도함수에 1단계-NR알고리즘을 적용하여 근사적인 v_t 의 정규분포 확률커널을 얻는 방법을 이용하고 있다. 그런데 $\ln p(r_t, v_{t+1}|v_t, \cdot)$ 이 v_t 에 대하여 전역적 오목(globally concave)이 아니므로 이와 같은 1단계-NR알고리즘을 이용하는 근사에서 2계도함수가 양의 확률로 비음이 되는 문제가 발생할 수 있다. 물론 다른 최적화방법으로 $\ln p(r_t, v_{t+1}|v_t, \cdot)$ 의 최빈값을 찾을 수도 있다. 그러나 이 경우 최적화에 시간이 많이 소요될 수 있다는 단점이 있다. 모형설정 오류가 심각하지 않다면, v_t 의 사전확률밀도함수로부터 얻어지는 식 (3.10)과 식 (3.16)의 예측치를 1단계-NR알고리즘의 후보점으로 이용하는 방법은 심각한 문제를 유발하지 않는다. 물론 양의 확률로 2계도함수가 양이 될 수 있다. 이 경우 1계도함수만을 이용하는 1단계-BHHH알고리즘(Berndt-Hall-Hall-Hausman algorithm)을 이용할 수 있다. 이 경우 $-\frac{\partial^2 \ln p(r_t, v_{t+1}|v_t)}{\partial v_t^2} \Big|_{v_t=m_t}$ 를 $\left(-\frac{\partial \ln p(r_t, v_{t+1}|v_t)}{\partial v_t} \Big|_{v_t=m_t}\right)^2$ 으로 대체하는 것이 된다. 2계도함수가 비음인 경우 이와 같이 1단계-BHHH알고리즘을 적용하여 얻은 정규분포 근사가 좋지 않을 수 있고 이에 따라 사후표본추출의 효율성 또한 좋지 않을 수 있다. 그러나 ARMH알고리즘에서 근사가 좋지 않은 후보생성확률밀도함수 이용에 따른 표본추출의 비효율성이 MH채택확률을 통해서 조정된다⁴.

■ 파라미터 $\Psi = \{\mu^\Delta, \delta, \mu, \phi, \psi, \omega^2\}$ 의 사후표본추출

조건부분산이 주어진 경우, 비교적 쉽게 파라미터의 사후표본을 생성할 수 있다. $\{v_t\}_{t=1}^T$ 가 주어졌을 때, 식 (3.3)으로부터 다음과 같은 $\{\mu^\Delta, \delta\}$ 의 사후조건부확률밀도함수를 유도할 수 있다. 이하의 논의에서 Ψ_{-a} 는 a 를 제외한 나머지 파라미터들을 나타낸다.

$$\begin{aligned} & \pi\left(\mu^\Delta, \delta \mid \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\{\mu^\Delta, \delta\}}\right) \\ & \propto \left\{ \prod_{t=1}^{T-1} p(r_t, v_{t+1}|v_t, \mu^\Delta, \delta) \right\} p(r_T|v_T, \mu^\Delta, \delta) \pi(\mu^\Delta) \pi(\delta) \end{aligned} \quad (3.21)$$

식 (3.21)을 정리하면, $\{\mu^\Delta, \delta\}$ 의 사후표본추출을 위한 다음과 같은 정규분포

⁴예외적인 상황에서의 1단계-BHHH알고리즘을 이용한 근사로 인해 조건부분산 사후표본추출의 전반적인 효율성이 심각하게 훼손되지 않음을 모의실험을 통해 확인할 수 있었다.

의 사후조건부확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$\mu^\Delta, \delta | \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\{\mu^\Delta, \delta\}} \sim N \left[\bar{B} \left(B_0^{-1} b_0 + \left(\sum_{t=1}^{T-1} \frac{x_t y_t}{(1-\rho^2)v_t} + \frac{x_T r_T}{v_T} \right) \right), \bar{B} \right] \quad (3.22)$$

$$\bar{B} = \left(B_0^{-1} + \left(\sum_{t=1}^{T-1} \frac{x_t x_t'}{(1-\rho^2)v_t} + \frac{x_T x_T'}{v_T} \right) \right)^{-1}$$

여기에서 $b_0 = (b_{\mu^\Delta}, b_\delta)'$, $B_0 = \text{diag}(B_{\mu^\Delta}, B_\delta)$, $\{x_t = (1, v_t)'\}_{t=1}^{T-1}$, 그리고 $\left\{ y_t = \frac{r_t - \rho(v_{t+1} - \mu - \phi(v_t - \mu))}{\sigma_\eta \sqrt{v_t}} \right\}_{t=1}^{T-1}$ 이다.

조건부분산 방정식에 포함된 파라미터 $\{\mu, \phi, \rho, \sigma_\eta^2\}$ 를 직접 표본추출하는 것이 불가능하므로 MH알고리즘을 이용하여 사후표본추출할 수 있다. 먼저, μ 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같이 축약될 수 있다.

$$\pi(\mu | \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\mu}) \propto p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \left[\prod_{t=1}^{T-1} p(v_{t+1} | v_t, r_t, \Psi) \right] \pi(\mu) \quad (3.23)$$

식 (3.23)에서 $[\cdot]$ 부분은 다음과 같은 절단정규분포의 확률커널이다.

$$q(\mu) = TN_{(0, \infty)} \left[\bar{B}_\mu \left(B_\mu^{-1} b_\mu + \frac{(1-\phi)}{\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{v_{t+1} - \phi v_t - \rho \sigma_\eta \sqrt{v_t} (r_t - \mu^\Delta - \delta v_t)}{v_t^2} \right), \bar{B}_\mu \right] \quad (3.24)$$

여기에서 $\bar{B}_\mu = \left(B_\mu^{-1} + \frac{(1-\phi)^2}{\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{v_t^2} \right)^{-1}$ 이다. 식 (3.24)를 후보생성확률밀도함수로 이용하는 MH알고리즘으로 μ 의 사후표본을 생성할 수 있다. 후보표본 μ^* 의 MH채택확률은 다음과 같다.

$$\alpha_{MH}(\mu, \mu^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(v_1 | \mu^*, \phi, \sigma_\eta^2)}{p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2)} \right\} \quad (3.25)$$

다음으로 ϕ 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi(\phi | \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\phi}) \propto p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \left[\prod_{t=1}^{T-1} p(v_{t+1} | v_t, r_t, \Psi) \right] \pi(\phi) \quad (3.26)$$

식 (3.26)에서 $[\cdot]$ 부분은 다음과 같은 절단정규분포의 확률커널이다.

$$q(\phi) = TN_{(-1,1)} \left[\bar{B}_\phi \left(B_\phi^{-1} b_\phi + \frac{1}{\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{(v_t - \mu)(v_{t+1} - \mu - \rho \sigma_\eta \sqrt{v_t}(r_t - \mu^\Delta - \delta v_t))}{v_t^2} \right), \bar{B}_\phi \right] \quad (3.27)$$

여기에서 $\bar{B}_\phi = \left(B_\phi^{-1} + \frac{1}{\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1(v_t - \mu)^2}{v_t^2} \right)^{-1}$ 이다. 그러므로 식 (3.27)의 $q(\phi)$ 를 후보생성확률밀도함수로 이용하는 MH알고리즘을 이용할 수 있다. 생성한 후보표본 ϕ 의 MH채택확률은 다음과 같다.

$$\alpha_{MH}(\phi, \phi^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(v_1 | \mu, \phi^*, \sigma_\eta^2)}{p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2)} \right\} \quad (3.28)$$

마지막으로, $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 을 사후표본추출하기 위한 $\{\psi, \omega^2\}$ 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi \left(\psi, \omega^2 \mid \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\{\rho, \sigma_\eta^2\}} \right) \\ \propto p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \left[\left\{ \prod_{t=1}^{T-1} p(r_t, v_{t+1} | v_t, \Psi) \right\} \pi(\psi, \omega^2) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Jacquier *et al.* (2004)의 제약하의 공분산행렬 표본추출방법을 이용하기 위해 다음과 같은 보조방정식에 포함된 $\{\psi, \omega^2\}$ 의 사전확률밀도함수를 설정하였다.

$$\tilde{\eta}_t = \psi \varepsilon_t + \omega \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1), \quad t = 1, \dots, T-1 \quad (3.30)$$

여기에서 $\tilde{\eta}_t = [v_{t+1} - \mu - \phi(v_t - \mu)]/v_t$, $\varepsilon_t = (r_t - \mu^\Delta - \delta v_t)/\sqrt{v_t}$ 이 이용하면 식 (3.29)의 $[\cdot]$ 부분은 다음과 같은 정규-역감마분포의 확률커널임을 알 수 있다.

$$\begin{cases} \pi \left(\omega^2 \mid \{\tilde{\eta}_t, \varepsilon_t\}_{t=1}^{T-1} \right) = IG \left(\frac{d_0 + T - 1}{2}, \frac{s_0 + \sum_{t=1}^{T-1} \tilde{\eta}_t^2 - (\sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t \tilde{\eta}_t)^2 / (B_\psi^{-1} + \sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t^2)}{2} \right) \\ \pi \left(\psi \mid \omega^2 \mid \{\tilde{\eta}_t, \varepsilon_t\}_{t=1}^{T-1} \right) = N \left(\frac{\sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t \tilde{\eta}_t}{B_\psi^{-1} + \sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t^2}, \frac{\omega^2}{B_\psi^{-1} + \sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t^2} \right) \end{cases} \quad (3.31)$$

식 (3.31)을 후보생성확률밀도함수로 이용하는 MH알고리즘으로 $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 의 사후표본을 생성할 수 있다. 식 (3.31)로부터 생성한 후보표본 $\{\psi^*, \omega^{2*}\}$ 을

$\rho = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + \omega^2}}$, $\sigma_\eta^2 = \psi^2 + \omega^2$ 의 일대일 대응관계를 이용하여 $\{\rho^*, \sigma_\eta^{2*}\}$ 의 후보 표본으로 변환할 수 있다. 그리고 이렇게 변환된 후보표본을 다음과 같은 MH 채택확률로 채택하는 방법으로 $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 을 사후표본추출할 수 있다.

$$\alpha_{MH}(\{\rho, \sigma_\eta^2\}, \{\rho, \sigma_\eta^2\}^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^{2*})}{p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2)} \right\} \quad (3.32)$$

(3) 일반적인 연속시간 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론

3.2에서 논의한 조건부분산에 대한 사후표본추출 알고리즘에 적용된 조건부분산 사후분포근사는 GARCH 극한 확률변동성모형 뿐만 아니라 다양한 연속시간 및 이산시간 확률변동성모형의 조건부분산 사후표본추출에 이용될 수 있다. 연속시간 확률변동성모형 추정을 위해 오일러이산화를 이용하는 경우, 1단계-NR알고리즘을 이용하여 각 시점의 조건부분산 사후분포를 근사할 수 있다. 이를 위해 필요한 것은 초기 조건부분산의 주변확률분포 또는 확률 커널을 알 수 있어야 한다는 점이다. 최근 Ignatieva *et al.* (2015)는 상태변수의 사전확률밀도함수를 후보생성확률밀도함수로 이용하는 MH알고리즘으로 조건부분산을 사후표본추출하였다. 그러나 이 경우 후보표본생성이 쉬운 반면 MH알고리즘의 사후 표본 채택확률이 65% 이하인 경우가 대부분이므로 베이지언 추론을 위해 매우 많은 사후 표본추출이 요구된다. 기존 연구들에서 일반적으로 이용된 RWMH알고리즘(random-walk Metropolis-Hasting algorithm)은 사전적인 실험과 튜닝에 많은 시간과 경험을 필요로 한다는 단점이 있다. 이와 달리 3.2에서 논의한 1단계-NR알고리즘을 이용한 조건부분산 사후분포 근사는 비교적 이용하기 쉽다. 또한 적극적인 사후분포근사의 방법을 이용하므로 MH알고리즘의 사후 표본 채택확률이 대부분 80% 이상으로 얻어진다. 따라서 조건부분산의 사전확률밀도함수를 후보생성확률밀도함수로 이용하는 알고리즘에 비해 상대적으로 적은 사후 표본추출로 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론을 할 수 있다. 물론 강한 지속성을 가지는 조건부분산을 한 번에 하나씩 표본추출하므로 이에 따른 사후표본추출의 효율성 상실이 있을 수 있다.

1단계-NR알고리즘으로 조건부분산의 사후분포를 근사할 수 있는 확률과정으로 이용될 수 있는 단기이자율 확률과정을 Table 1에 수록하였다. 앞서 언급한 바와 같이 Table 1에 수록된 확률과정들 이외에도 조건부분산의 주변확률밀도함수나 그 확률커널을 알 수 있는 경우 1단계-NR알고리즘을 이용하여 확률변동성모형의 조건부분산의 사후분포를 근사할 수 있다. 연속시간 단기

이자율 확률과정이 안정성(stationarity)과 에르고딕성(ergodicity)을 충족하며 유일한 해를 가질 조건은 Ait-Sahalia (1996), Conley *et al.* (1997) 등에서 자세히 논의된 바 있다. 조건부분산과정 역시 단기이자율과 마찬가지로 항상 비음(non-negativity)을 충족하여야 하므로 단기이자율 확률과정에 적용되는 안정성, 에르고딕성, 유일성 등의 조건이 동일하게 적용될 수 있다. 다음과 같은 조건부분산 과정이 안정성과 에르고딕성을 충족하면,

$$dv_t = \mu(v_t)dt + \sigma(v_t)dW_t \tag{3.33}$$

v_t 의 주변확률밀도함수의 확률커널을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p(v_0) \propto \frac{1}{\sigma(v)^2} \exp\left(\int^x \frac{2\mu(u)}{\sigma(u)^2} du\right) \tag{3.34}$$

Table 1에 수록된 확률과정들의 주변확률밀도함수는 잘 알려져 있으므로, 보다 일반적인 확률과정의 주변확률밀도함수를 얻는데 식 (3.34)를 이용할 수 있다.

표 1: Stochastic processes for continuous-time stochastic volatility models

i) $dv_t = \kappa v_t dt + \sigma v_t dW_t$	Johnson and Shanno (1987)
ii) $d \ln v_t = \kappa(\theta - \ln v_t) dt + \sigma dW_t$	Wiggins (1987)
iii) $dV_t = \kappa V_t dt + \sigma V_t dW_t$	Hull and White (1987)
iv) $dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma dW_t$	Stein and Stein (1991), Schöbel and Zhu (1999)
v) $dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t$	Heston (1993)
vi) $dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma V_t^{3/2} dW_t$	Ahn and Gao (1999)

Note: In Table 1, v_t and V_t represent the conditional standard deviation and conditional variance, respectively.

Table 1에서 v_t 는 조건부표준편차를, V_t 는 조건부분산을 나타낸다. Table 1의 확률과정들 가운데 Stein and Stein (1991), Schöbel and Zhu (1999)과 Heston (1993)의 확률과정은 닫힌형태(closed-form)의 유로피언옵션 가격을 얻을 수 있는 확률과정이다. Table 1에서 i)과 iii)의 확률과정을 직접 이용하는 것보다 Itô보조정리(Itô's lemma)를 이용하여 로그조건부분산(또는 로그조건부표

준편차) 과정으로 변환한 과정을 이용하는 것이 확률변동성모형 추정에 보다 편리할 수 있다.

4. 모의실험

본 절에서는 3.2의 MCMC알고리즘으로 생성한 사후표본의 특성을 살펴봄으로서 본 연구에서 제안하는 MCMC알고리즘의 성과와 정도(accuracy)를 살펴보기로 한다. 이를 위해 다음과 같은 오일러이산화모형을 따르는 $T = 2000$ 의 자료를 생성한 후, 3.2에서 논의한 MCMC알고리즘을 이용하여 모형을 추정하는 모의실험을 1,000회 수행하였다.

$$\begin{aligned} r_t &= \sqrt{v_t} \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1) \\ v_{t+1} &= 1.5 + 0.98(v_t - 1.5) + 0.18v_t \eta_t \quad , \quad \eta_t \sim N(0, 1) \\ \text{corr}(\varepsilon_t, \eta_t) &= -0.7 \end{aligned} \quad (4.1)$$

식 (4.1)에서 파라미터값들은 Christoffersen *et al.* (2010)에서 분석한 1996년 1월 4일 ~ 2004년 12월 31일 기간의 S&P500 주가지수 수익률 일간 자료에 대한 분석결과를 참고한 것이다. 식 (4.1)의 이산화모형을 이용하여 자료를 생성하고 모의실험을 하는 것은 오일러이산화 편의가 파라미터 추정에 미치는 효과를 통제한 다음 본 연구에서 제안한 MCMC알고리즘의 성과를 살펴보기 위함이다. 모의실험에는 다음과 같은 파라미터들의 사전확률밀도함수를 설정하였다.

$$\begin{cases} \pi(\mu) = TN_{(0, \infty)}(0, 10^2) \quad , \quad \pi(\phi) = TN_{(-1, 1)}(0, 10^2) \\ \pi(\psi | \omega^2) = N(0, \omega^2/2) \quad , \quad \pi(\omega^2) = IG(2.5, 0.025) \end{cases} \quad (4.2)$$

모의실험에서 사후표본의 수렴을 확보하기 위하여 총 70,000개의 사후표본을 추출한 후 초기 50,000개를 제외한 나머지 20,000개의 사후표본에서 5개마다 하나씩 표본을 선택하여 얻어지는 4,000개를 사후추론에 이용하였다⁵. 이와 같은 방법으로 얻어진 1,000개의 사후평균(posterior mean)에 대한 요약통계량은 Table 2와 Figure 1에 수록되어 있다. 각각 $T = 2000$ 의 자료를 분석하여 얻은 파라미터들의 사후평균의 평균(mean), 표준편차(standard deviation), 95% HPD구간(highest probability density interval), RMSE(root mean squared

⁵모의실험과 실증분석에 이용되는 MCMC알고리즘은 gfortran으로 작성되었으며 Intel-i7-6700 CPU와 메모리 32기가바이트를 장착한 PC를 이용하였다. $T = 2000$ 의 생성자료 분석 시 1초당 약 150~180회의 사후표본 추출이 가능하였음을 밝힌다.

error), MAPE(mean absolute percentage error)를 표 [4.1]의 3열~7열에 수록하였다. 그리고 6행과 7행의 $Wald_0$ 와 $Wald_{01}$ 는 각각 다음과 같은 회귀식의 계수에 대한 $H_0 : a = 0$ 과 $H_0 : a = 0, b = 1$ 의 귀무가설에 대한 5%유의수준 Wald검정의 기각율(rejection rate)을 나타낸다.

$$(a) \sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\tilde{v}_t} = a + e_t, \quad (b) \sqrt{v_t^{true}} = a + b\sqrt{\tilde{v}_t} + u_t \quad (4.3)$$

여기에서 $\sqrt{v_t^{true}}$ 는 참변동성을, $\sqrt{\tilde{v}_t}$ 는 변동성의 사후평균을 나타낸다. ‘quadratic spectral kernel’과 ‘automatic lag selection’을 이용하여 얻은 Andrews (1991), Andrews and Monahan (1999)의 HAC공분산행렬(Heteroscedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix)을 식 (4.3)의 각 방정식의 계수에 대한 Wald검정에 이용하였다. 표 [4.1]의 8행과 9행에 $\sqrt{v_t}$ 의 사후평균의 성과를 측정하기 위한 $RMSE(\sqrt{v_t}) = T^{-1} \sum_{t=1}^{t=T} \left(\sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\tilde{v}_t} \right)^2$ 와 $MAPE(\sqrt{v_t}) = T^{-1} \sum_{t=1}^{t=T} \left(\frac{\sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\tilde{v}_t}}{\sqrt{v_t^{true}}} \right) \times 100$ 의 사후평균에 대한 요약통계량을 수록하였다. 그리고 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 의 평균 MH채택율을 마지막 10행에 수록하였다. 그리고 Figure 1의 좌측 패널은 $T = 2000$ 의 생성자료를 분석하여 얻은 파라미터들의 사후평균의 히스토그램과 함께 커널확률밀도함수(empirical kernel density)를 도시한 것이다. 그리고 우측 패널은 각 생성자료에 대한 NAGARCH(1,1)모형 파라미터 추정치들을 식 (2.7)에서와 같이 연속시간 GARCH 극한 확률변동성모형의 파라미터로 변환하여 얻어지는 파라미터 추정치들의 히스토그램과 커널확률밀도함수를 도시한 것이다. Figure 1의 각 패널에서 수직선은 참파라미터값을 나타낸다.

Table 2와 Figure 1의 좌측패널은 본 연구에서 제시한 MCMC알고리즘으로 추정된 파라미터의 사후평균들의 평균이 참파라미터값들에 가깝고 95%HPD 구간이 참파라미터값들을 충분히 포함하는 좋은 성과를 보여주고 있다. 그리고 Table 2의 10행은 본 연구의 MCMC알고리즘을 이용하여 생성한 조건부 분산의 MH채택율은 약 87%임을 보여주고 있다. 이와 같은 크기의 MH채택율은 조건부 분산의 사전확률밀도함수를 후보생성확률밀도함수로 이용하는 Ignatieva *et al.* (2015)의 알고리즘보다 효율적으로 조건부 분산의 사후표본을 생성함을 의미한다. Table 2에서 $Wald_0$ 의 기각율이 약 8%, $Wald_{01}$ 의 기각율이 약 20%, MAPE의 평균이 약 13%로 본 연구에서 제시하는 MCMC알고리즘이 변동성 또한 잘 적합하고 있음을 보여주고 있다.

Figure 1의 우측 패널에 수록된 NAGARCH(1,1)모형 추정치를 이용하여 얻은 연속시간 극한 과정 확률변동성모형의 파라미터 추정치들에 대한 요약

표 2: Simulation experiment results

	True	Mean	SD	HPD95	RMSE	MAPE
μ	1.5	1.4297	0.1570	(1.1131, 1.7225)	0.1719	9.1742
ϕ	0.98	0.9747	0.0063	(0.9619, 0.9844)	0.0082	0.6114
σ_η^2	0.0324	0.0338	0.0066	(0.0216, 0.0459)	0.0068	15.887
ρ	-0.7	-0.6694	0.0632	(-0.7727,-0.5400)	0.0702	7.3379
$Wald_0$		0.08				
$Wald_{01}$		0.195				
$RMSE(\sqrt{v_t})$		0.1831	0.0291			
$MAPE(\sqrt{v_t})$		12.6135	0.7337			
$\alpha_{MH}(\{v_t\}_{t=1}^T)$		0.866				

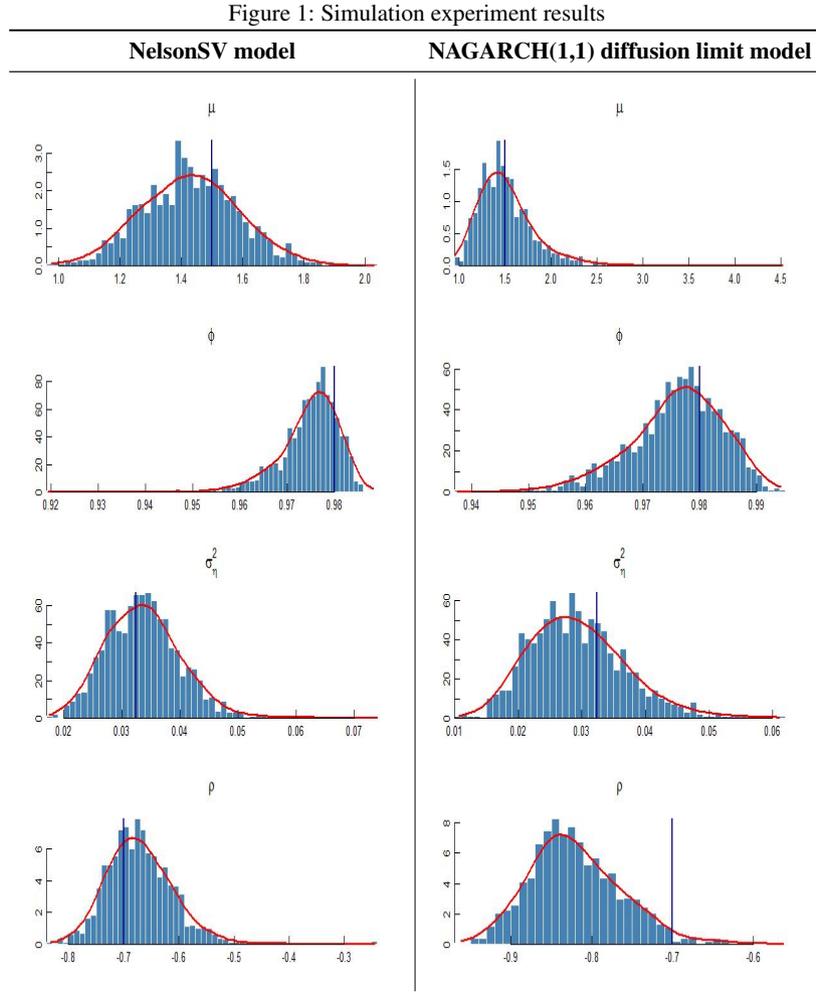
Note: In Table 2, columns 3 to 7 in rows 2 to 5 are the mean, standard deviation(SD), 95% highest probability density interval(HPD95), RMSE (root mean squared error), and mean absolute percentage error (MAPE) obtained using our proposed algorithm for the generated samples of size $T = 2000$, respectively. And $Wald_0$ and $Wald_{01}$ in rows 6 and 7 represent the rejection rates of 5% significance level Wald tests for the null hypotheses of $H_0 : a = 0$ and $H_0 : a = 0, b = 1$ in the following equations.

$$(a) \sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\bar{v}_t} = a + e_t, \quad (b) \sqrt{v_t^{true}} = a + b\sqrt{\bar{v}_t} + u_t$$

where $\sqrt{v_t^{true}}$ is true volatility and $\sqrt{\bar{v}_t}$, the posterior mean of volatility. Andrews (1991) and Andrews and Monahan (1999)'s HAC(Heteroscedasticity and autocorrelation consistent) covariance matrices obtained using quadratic spectral kernel with automatic lag selection was used for the Wald test. $RMSE(\sqrt{v_t}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T (\sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\bar{v}_t})^2$, $MAPE(\sqrt{v_t}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\bar{v}_t}}{\sqrt{v_t^{true}}} \right) \times 100$ measuring the performance of the posterior mean of $\sqrt{v_t}$, and the average MH acceptance rate of $\{v_t\}_{t=1}^T$ are in rows 8 to 10.

에서 가장 눈에 띄는 파라미터는 레버리지효과를 설명하는 파라미터 ρ 이다. Figure 1의 우측 4열에 수록된 모의실험 결과는 NAGARCH(1,1)모형 추정치와 식 (2.7)의 관계를 이용하여 얻은 ρ 추정치가 참파라미터보다 절대치가 더 크게 추정될 수 있음을 보여주고 있다. 이는 이산시간 GARCH모형 추정치로부터 얻은 연속시간 극한 확률변동성모형의 파라미터 추정치를 이용하고자

하는 경우, ρ 의 추정치에 편의가 있을 수 있음을 의미한다. ρ 를 제외한 나머지 파라미터들의 경우, 이러한 문제가 심각하지 않은 것으로 나타나고 있다.



Note: In Figure 1, left panel shows the histograms and empirical kernel density functions of the posterior means of respective parameters of NelsonSV model obtained by analyzing the generated data of size $T = 2000$. Right panel displays the histograms and empirical kernel density functions of the parameter estimates of the discretized model of NAGARCH(1,1) diffusion limit model obtained transforming the parameter estimates of NAGARCH(1,1) model according to eq. (2.3). In each panel, the vertical line represents the true parameter value.

다음으로 실제 자료에 대한 분석을 통해 본 연구에서 제시한 MCMC 알고리즘의 성과를 살펴보기로 한다. 분석에 이용한 자료는 Christoffersen *et al.* (2010)에서 이용된 1996년 1월 4일~2004년 12월 31일 기간의 S&P500 주가지수 수익률 일간 자료이다. 본 연구에서 이용한 자료는 Yahoo Finance에서 다운로드한 자료이므로 Christoffersen *et al.* (2010)의 자료와 정확하게 일치하지는 않는다. 그럼에도 불구하고 실증분석 결과를 비교하는데 큰 무리는 없는 것으로 판단된다. Christoffersen *et al.* (2010)에서와 같이 수익률의 평균을 제거한 자료를 이용하여 다음과 같은 확률변동성모형을 추정하였다.

$$i) \begin{cases} d\ln S_t = \sqrt{V_t} dW_{1t} \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma V_t dW_{2t} \\ E[dW_{1t} dW_{2t}] = \rho dt \\ V_0 = IG\left(1 + \frac{2\kappa}{\sigma^2}, \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\right) \end{cases}, \quad ii) \begin{cases} d\ln S_t = \sqrt{V_t} dW_{1t} \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_{2t} \\ E[dW_{1t} dW_{2t}] = \rho dt \\ V_0 = G\left(\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}, \frac{2\kappa}{\sigma^2}\right) \end{cases} \quad (4.4)$$

식 (4.4) ii)에서 $G(a, b)$ 는 형태파라미터가 a 이고 스케일파라미터가 b 인 감마분포를 나타낸다. 조건부분산이 Feller제곱근과정을 따르는 식 (4.4) ii) 모형을 Heston (1993)모형이라고도 한다. 식 (4.4) ii) 모형을 오일러이산화하면, 다음과 같다.

$$\begin{cases} r_t = \sqrt{v_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1) \\ v_{t+1} = \mu + \phi(v_t - \mu) + \sigma_\eta \sqrt{v_t} \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, 1), \quad \forall v_t > 0 \\ v_1 \sim G\left(\frac{2(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2}, \frac{2(1-\phi)}{\sigma_\eta^2}\right) \\ \text{corr}(\varepsilon_t, \eta_t) = \rho \end{cases} \quad (4.5)$$

여기에서 $\mu = \theta\Delta$, $\phi = 1 - \kappa\Delta$, $\sigma_\eta = \sigma\Delta$ 이며, $\forall v_t > 0$ 은 조건부분산이 항상 양임을 의미하는 제약조건이다. 그리고 식 (4.4) 모형들을 오일러 이산화한 모형들에 베이지언 추론을 위해 식 (4.2)의 사전확률밀도함수를 설정하였다.

3.3에서 논의한 바와 같이 본 연구에서 제시한 1단계-NR알고리즘을 이용한 각 시점의 조건부분산 사후분포 근사를 식 (4.5)에도 적용할 수 있다. 그리고 조건부분산이 주어진 경우 파라미터들의 사후조건부분포 또한 3.2의 알고리즘을 준용하여 쉽게 유도할 수 있다. 총 15만개의 사후표본을 생성한 후, 초기 5만개를 제외한 나머지 10만개의 사후표본에서 10개마다 하나씩 취해 얻어지는 1만개의 사후표본을 베이지언 추론에 이용하였다.

식 (4.4)의 모형에 대한 추정결과는 Table 3에 수록되어 있다. 식 (4.4) i) 과 ii)의 연속시간모형 파라미터는 각각 오일러이산화모형의 파라미터들과의 관계인 $\mu = \theta\Delta$, $\phi = 1 - \kappa\Delta$, $\sigma_\eta = \sigma\sqrt{\Delta}$ 와 $\mu = \theta\Delta$, $\phi = 1 - \kappa\Delta$, $\sigma_\eta = \sigma\Delta$ 의 관계를 이용하여 얻을 수 있다. 연율 표시 파라미터는 $\Delta = 1/252$ 를 이용하여 구하였다. 논의의 편의를 위해 식 (4.4) i)과 ii) 모형을 각각 NSV 모형(Nelson's stochastic volatility model)과 Sqrt-SV모형(Feller's square-root stochastic volatility model)이라 하기로 한다. Table 3 2열과 3열의 각 파라미터 블록에서 1행은 사후평균, 2행 ()안의 수치는 표준편차, 3행 [,]안의 수치는 95% HPD구간(highest probability density interval), 4행 <>안의 수치는 사후 표본의 전반부 10% 표본과 후반부 50% 표본을 비교하는 Geweke (1992)의 수렴진단통계량(Geweke's convergence diagnostic, CD)을 나타낸다. 수렴진단통계량 CD는 표준정규분포를 따른다. 4열과 5열은 Christoffersen *et al.* (2010)의 3159페이지 Table 1에 수록된 추정결과를 발췌한 것이다. 4열과 5열의 각 파라미터 블록 1행은 SML추정치((simulated maximum likelihood estimate)를, 2행 ()안의 수치는 표준오차(standard error)를 나타낸다. Christoffersen *et al.* (2010)은 파티클필터를 이용한 SML추정법으로 식 (4.4)의 확률변동성모형을 추정하였다. 파티클필터를 이용하는 SML추정법은 효율성을 제고하기 위해 파티클의 수를 증가시킬 경우, MCMC알고리즘을 이용하는 베이지언 추정보다 추정시간이 더 많이 소요될 수 있는 계산상의 부담이 큰 추정법이다. Table 3의 각 모형에 대한 추정결과를 보면, 본 연구의 MCMC알고리즘을 이용한 추정 결과와 파티클필터를 이용한 SML추정 결과가 매우 유사함을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서 제시하는 베이지언 추론 알고리즘의 성과가 좋음을 알 수 있다.

5. 실증분석

본 절에서는 실증분석 예시로 3.2에서 제시한 MCMC알고리즘을 이용한 실증분석 결과를 살펴보기로 한다. 2001년 1월 3일 ~ 2014년 12월 30일 기간의 KOSPI200 주가지수 로그차분 수익률 $r_t = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1})$ 일간자료를 이용하여 분석하였다. 자료의 크기는 $T = 3467$ 이다. [Table 4]에 수익률의 요약통계량이 수록되어 있으며, 주가지수와 수익률 추이를 Figure 2에 수록하였다. [Table 4]에서 JB는 자유도2의 Jarque-Bera정규성검정통계량을 그리고 LB(10)과 ML(10)은 자유도 10의 Ljung-Box통계량과 McLeod-Li통계량을 나타낸다. 각 통계량 아래 ()안의 수치는 p값(p-values)이다. [Table 4]를 보면 KOSPI200 지수 수익률이 약 -0.39의 왜도와 약 5.27의 초과 첨도를 가지므로

표 3: Estimation results for stochastic volatility models

	NSV	Sqrt-SV	NSV	Sqrt-SV
	0.0372	0.0346	0.0408	0.0352
	(0.0040)	(0.0032)	(0.0067)	(0.0026)
μ	[0.0294, 0.0449]	[0.0289, 0.0409]		
	<-0.0962>	<1.0815>		
	4.7197	6.773	3.9248	6.52
	(1.108)	(1.5243)	(1.1392)	(1.1096)
ϕ	[2.7819, 6.9908]	[3.6899, 9.6019]		
	<0.4177>	<-0.8598>		
	2.7357	0.455	2.779	0.4601
	(0.2729)	(0.0464)	(0.1949)	(0.0309)
σ	[2.2374, 3.2939]	[0.3647, 0.5417]		
	<0.5073>	<-1.2436>		
	-0.7627	-0.7457	-0.7876	-0.771
	(0.0411)	(0.0454)	(0.0345)	(0.0375)
ρ	[-0.8407, -0.6812]	[-0.8275, -0.6526]		
	<0.9330>	<-1.0517>		

Note: In each parameter block in columns 2 and 3, the number in the first row, number in () in the second row, numbers in [,] in the third row, and value in < > in fourth row are the posterior mean, standard deviation, 95% HPD interval and convergence diagnostic statistic (CD) of Geweke (1992) comparing the first The convergence diagnostic statistic CD has the standard normal distribution. Columns 4 and 5 are the simulated maximum likelihood estimation results excerpted from Table 1 on page 3159 in Christoffersen *et al.* (2010). The numbers in parenthesis in column 4 and 5 are standard errors.

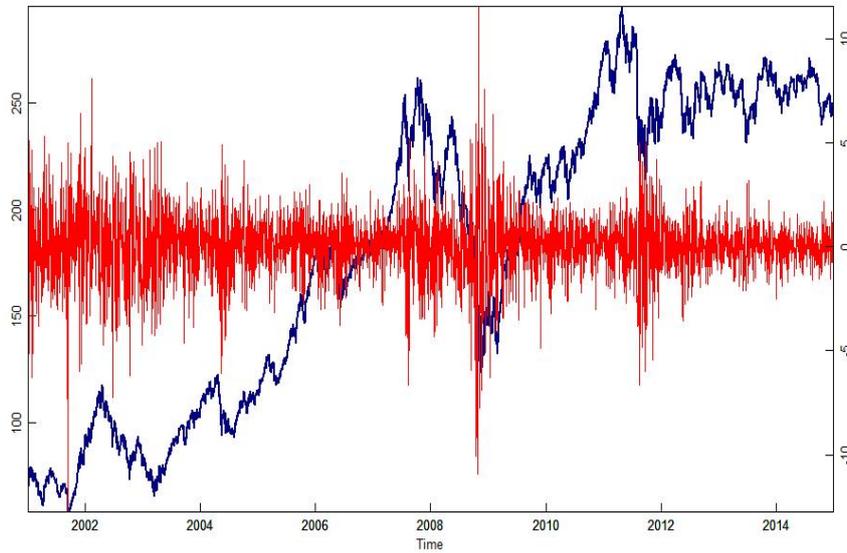
Jarque-Bera 정규성검정이 기각됨을 알 수 있다. 그리고 Ljung-Box검정은 유의하지 않음에 반해 McLeod-Li검정은 유의하다. 이러한 검정결과는 전형적인 변동성 집중의 특성을 보여주고 있다.

표 4: Summary statistics for KOSPI200 index returns (2001/01/03 - 2014/12/30)

Mean	SD	Min	Max	Skewness	Kurtosis	JB	LB(10)	ML(10)
0.038	1.5716	-12.7389	11.5397	-0.3902	8.2714	4108.31 (0.0000)	10.033 (0.4376)	1092.3 (0.0000)

Note: In Table 4, JB represents the Jarque-Bera normality test statistic with 2 degrees of freedom, and LB(10) and ML(10) represent the Ljung-Box statistic and McLeod-Li statistic with 10 degrees of freedom. The numbers in () under each statistic are p-values.

Figure 2: KOSPI200 index and return (2001/01/03 - 2014/12/30)



Note: In Figure 2, the left and right axes represent the P_t and $r_t = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1})$, respectively.

다음과 같은 모형을 실증분석에 이용하였다.

$$\text{i) } \begin{cases} d \ln S_t = \mu^S dt + \sqrt{V_t} dW_{1t} \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_{2t} \\ E[dW_{1t} dW_{2t}] = \rho dt \\ V_0 = IG\left(1 + \frac{2\kappa}{\sigma^2}, \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\right) \end{cases} , \text{ ii) } \begin{cases} d \ln S_t = \mu^S dt + \sqrt{V_t} dW_{1t} \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_{2t} \\ E[dW_{1t} dW_{2t}] = \rho dt \\ V_0 = G\left(\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}, \frac{2\kappa}{\sigma^2}\right) \end{cases} \quad (5.1)$$

식 (5.1)의 연속시간 확률변동성모형에 대한 Δ 시간간격 오일러이산화모형은 다음과 같다.

$$\text{i) } \begin{cases} r_t = \mu^\Delta + \sqrt{v_t} \varepsilon_t \\ dv_{t+1} = \mu + \phi(v_t - \mu) + \sigma_\eta v_t \eta_t \\ \forall v_t > 0 \\ v_1 \sim IG\left(1 + \frac{2(1-\phi)}{\sigma_\eta^2}, \frac{2(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2}\right) \\ \varepsilon_t \sim N(0, 1), \eta_t \sim N(0, 1) \\ \text{corr}(\varepsilon_t, \eta_t) = \rho \end{cases} , \text{ ii) } \begin{cases} r_t = \mu^\Delta + \sqrt{v_t} \varepsilon_t \\ dv_{t+1} = \mu + \phi(v_t - \mu) + \sigma_\eta \sqrt{v_t} \eta_t \\ \forall v_t > 0 \\ v_1 \sim G\left(\frac{2(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2}, \frac{2(1-\phi)}{\sigma_\eta^2}\right) \\ \varepsilon_t \sim N(0, 1), \eta_t \sim N(0, 1) \\ \text{corr}(\varepsilon_t, \eta_t) = \rho \end{cases} \quad (5.2)$$

식 (5.2)에서 $\mu^\Delta = \mu^S \Delta$ 이다. 식 (5.2) 모형들의 파라미터에 대한 사전확률밀도는 다음과 같이 설정하였다.

$$\begin{cases} \pi(\mu^\Delta) = N(0, 10^4), \pi(\mu) = TN_{(0, \infty)}(0, 10^2), \pi(\phi) = TN_{(-1, 1)}(0, 10^2) \\ \pi(\psi | \omega^2) = N(0, \omega^2/2), \pi(\omega^2) = IG(2.5, 0.025) \end{cases} \quad (5.3)$$

식 (5.3)의 사전확률밀도함수는 식 (4.2)의 사전확률밀도함수에 실질적으로 무정보에 가까운 μ^Δ 의 사전확률밀도함수를 추가한 것이다. 총 15만개의 사후표본을 생성한 후, 초기 5만개의 표본을 제외한 나머지 10만개의 표본에서 10개마다 하나씩 취해 얻어지는 1만개의 사후표본을 베이지언 추론에 이용하였다.

각 모형의 파라미터들에 대한 추정 결과는 Table 5와 Figure 3에 수록되어 있다. Table 5 2열과 3열의 각 파라미터 블록에서 1행은 사후평균, 2행 ()안의 수치는 표준편차, 3행 [,]안의 수치는 95% HPD구간, 4행 < >안의 수치는 사후표본의 전반부 10% 표본과 후반부 50% 표본을 비교하는 Geweke (1992)의 수렴진단통계량을 나타낸다. 4열은 NAGARCH(1,1)모형 추정치로부터 얻어지는 GARCH 극한과정에 대응되는 파라미터 추정치이며 ()안의 수치는 델타법(delta method)으로 구한 표준오차를 나타낸다. Table 5에서 'log-likelihood'는 10만개의 파티클을 이용하는 보조파티클필터로 얻은 것이다. NSV-G모형의 'log-likelihood'에서 []안의 수치는 NAGARCH(1,1)모형의 로그우도이다. 그리고 Figure 3의 (A)와 (B) 패널은 각각 NSV모형과 Sqrt-SV모형 파라미터들의 사후표본에 대한 요약 그래프들을 도시한 것이다. 각 패널에서 1열~4열은 각

각 사후표본의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관플롯(autocorrelation plot), 히스토그램과 커널확률밀도함수(empirical kernel density), 사후표본의 수렴 여부를 판단할 수 있는 Bauwens and Lubrano (1998)의 CUSUM플롯을 도시한 것이다. 트레이스플롯에서 굵은 실선은 사후표본의 궤적을 적합한 LOESS추정치이다.

논의의 편의를 위해 식 (5.2) i)모형을 NSV모형, 식 (5.2) ii)모형을 Sqrt-SV모형, 그리고 NAGRCH(1,1)모형 파라미터 추정치를 식 (2.7)에서와 같이 변환하여 추정한 NSV모형을 NSV-G모형이라 하기로 한다. Table 5의 CD와 Figure 3의 트레이스플롯, 자기상관플롯, CUSUM플롯은 전반적으로 사후표본의 수렴에 문제가 없음을 보여주고 있다. Table 5에서 모형들 간에 가장 두드러진 차이를 보이는 파라미터는 레버리지효과를 설명하는 ρ 이다. NSV모형의 경우 ρ 의 사후평균이 약 -0.36 임에 반해 Sqrt-SV모형의 경우 사후평균이 약 -0.56 으로 추정되었다. 이와 같은 차이는 NSV모형의 경우 조건부분산방정식의 변동성이 전기의 조건부분산 수준에 의존하는 반면, Sqrt-SV모형의 경우 전기의 조건부분산의 제곱근에 의존하는 특성에 기인한 것으로 볼 수 있다. 이러한 모형설정의 특성으로 인해 Sqrt-SV모형에서 동일한 크기의 음의 수익률 충격이 다음 기의 조건부분산을 일정수준으로 증가시키기 위해 더 큰 절대치를 가지는 ρ 파라미터가 필요한 것으로 보인다.

Table 5의 3열에 수록된 NSV-G모형 추정 결과를 보면, μ , ϕ , ρ 의 추정치가 NSV모형의 그것들보다 전반적으로 더 크고, σ_{η}^2 추정치는 더 작은 것으로 나타나고 있다. 4절의 모의실험 결과를 고려하여 이들 추정치들을 평가하면, NSV-G모형의 파라미터 추정치에 편의가 존재할 수 있는 것으로 볼 수 있고 NSV모형과의 모형 비교를 통해서 이를 확인할 수 있다. Figure 4는 NSV모형과 Sqrt-SV모형 변동성 $\{\sqrt{v_t}\}_{t=1}^T$ 의 사후평균을 도시한 것이다. Figure 4에서 실선과 쇄선은 각각 NSV모형과 Sqrt-SV모형의 $\sqrt{v_t}$ 의 사후표본평균을 나타낸다. Figure 4를 보면 2008년 후반 ~ 2009년 기간의 미국 금융위기 기간 동안 NSV모형과 Sqrt-SV모형의 변동성이 크게 차이가 남을 알 수 있다. 즉, 변동성이 급격하게 증가하는 기간에 Sqrt-SV모형보다 NSV모형의 변동성이 더 크게 증가하는 특징이 있음을 알 수 있다. NSV모형의 이러한 특징 때문에 NSV모형이 Sqrt-SV모형보다 더 좋은 성과를 보일 수 있다(Christoffersen *et al.* (2010)).

확률변동성모형들에 대한 진단과 모형비교를 위해 파티클필터(particle filter)를 이용하는 것이 필요하다. 파티클필터는 순차중요표본추출법(sequential importance sampling)과 리샘플링(resampling)으로 생성한 가중이산표본(weighted discrete samples)으로 계산이 어렵거나 불가능한 일반적인 상태공간 모형의 필터확률밀도함수와 예측확률밀도함수를 근사하는 방법이다. Kim *et*

표 5: Estimation results for stochastic volatility models

	NSV	Sqrt-SV	NSV-G
μ_{Δ}	0.0674	0.041	0.0309
	(0.0194)	(0.0195)	(0.0198)
	[0.0289, 0.1051]	[0.0033, 0.079]	
	<1.1575>	<-0.7273>	
μ	1.9485	2.3616	3.4408
	(0.1908)	(0.3178)	(1.4599)
	[1.5868, 2.3270]	[1.7810, 2.9911]	
	<-1.2706>	<-0.4474>	
ϕ	0.9777	0.9825	0.9933
	(0.0035)	(0.0041)	(0.0036)
	[0.9707, 0.9841]	[0.9747, 0.9903]	
	<0.3086>	<-0.7401>	
σ_{η}^2	0.0403	0.0439	0.0191
	(0.0058)	(0.0084)	(0.0042)
	[0.0294, 0.0052]	[0.0287, 0.0606]	
	<-0.0569>	<0.5795>	
ρ	-0.3627	-0.5602	-0.6545
	(0.0547)	(0.0511)	(0.047)
	[-0.4656, -0.2527]	[-0.6558, -0.4573]	
	<0.5895>	<-1.0926>	
log-likelihood	-5899.4	-5898.9	-5892.5 [-5925.3]

Note: In each parameter block in columns 2 and 3, the number in the first row, number in () in the second row, numbers in [,] in the third row, and value in < > in fourth row are the posterior mean, standard deviation, 95% HPD interval and convergence diagnostic statistic (CD) of Geweke (1992) comparing the first The convergence diagnostic statistic CD has the standard normal distribution. Column 4 represents the parameter estimates of the discretized model of NAGARCH(1,1) limit diffusion model obtained transforming the parameter estimates of NAGARCH(1,1) model according to eq. (2.3). Numbers in parentheses are standard errors obtained applying the delta method to corresponding transformations. The log-likelihood of respective model in Table was obtained applying auxiliary particle filter using 100,000 particles. Number in [] below the log-likelihood of NSV-G model is the log-likelihood of NAGRACH(1,1) model.

al. (1998)에서 확률변동성모형 진단을 위해 이용된 이후 파티클필터는 확률변동성모형과 같은 일반적인 비선형비정규상태공간모형(nonlinear non-gaussian

state space models) 추정과 진단에 이용되었다(Kim *et al.*, 1998; Chib *et al.*, 2002; Durham and Gallant, 2002; Chib *et al.*, 2006; Omori *et al.*, 2007; Christoffersen *et al.*, 2010; Malik and Pitt, 2011; Ferriani and Pastorello, 2012 등). 파티클필터의 근사 정도(approximation accuracy)와 효율성(efficiency)은 중요확률밀도함수(importance density)와 리샘플링 방법 선택에 크게 영향을 받을 수 있다. 효율적인 표본추출을 위한 다양한 중요확률밀도함수와 리샘플링 방법들이 제시되었다. 파티클필터에 대한 보다 자세한 논의는 Cappé *et al.*, 2007; Creal, 2009; Doucet and Johansen, 2011 등을 참조할 수 있다. 이하에서 파티클필터를 이용한 진단통계량과 모형비교 통계량들에 대해 간략하게 논의하기로 한다.

파티클필터를 이용하면 1기간 예측확률(one-step ahead predictive distribution)인 PIT(probability integral transform)를 계산할 수 있다. 본 연구는 Pitt and Shephard (1999, 2001)의 보조파티클필터(auxiliary particle filter)와 Carpenter *et al.* (1999)의 체계적 리샘플링(systematic resampling)을 이용하여 확률변동성모형 진단에 필요한 PIT를 구하였다. 보조파티클필터를 이용하기 위해 식 (5.2)의 조건부분산 방정식을 각각 다음과 같이 변환하는 것이 필요하다.

$$\begin{cases} \text{i)} \begin{cases} v_t = \mu + \phi(v_{t-1} - \mu) + \rho\sigma_\eta\sqrt{v_{t-1}}(r_{t-1} - \mu^\Delta) + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_\eta v_{t-1}\eta_t^* \\ \forall v_t > 0, \eta_t^* \sim IN(0, 1) \end{cases} \\ \text{ii)} \begin{cases} v_t = \mu + \phi(v_{t-1} - \mu) + \rho\sigma_\eta(r_{t-1} - \mu^\Delta) + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_\eta\sqrt{v_{t-1}}\eta_t^* \\ \forall v_t > 0, \eta_t^* \sim IN(0, 1) \end{cases} \end{cases} \quad (5.4)$$

식 (5.4)에서 $IN(0, 1)$ 은 독립인 표준정규분포를 나타낸다.

모형설정 오류가 없다는 귀무가설 하에 파티클필터를 이용하여 얻은 PIT(probability integral transform) ⁶는 독립적이고 동일한 표준일량분포(indepen-

⁶파티클필터를 이용하여 다음과 같이 PIT를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_t(\psi_0) &= \Pr[R_t \leq r_t | r_{1:t-1}; \psi_0] \\ &= \int \Pr[R_t \leq r_t | v_t, r_{1:t-1}; \psi_0] p(v_t | r_{1:t-1}; \psi_0) dv_t \simeq \sum_{i=1}^N w_{t-1}^{(i)} P(r_t | v_t^{(i)}; \psi_0) \end{aligned}$$

여기에서 r_t 와 R_t 는 각각 t 시점의 수익률 관측치와 이에 대한 확률변수, $r_{1:t-1} = \{r_1, \dots, r_{t-1}\}$, ψ_0 는 참파라미터 벡터이다. 그리고 $w_{t-1}^{(i)}$ 는 $t-1$ 기의 i 번째 파티클의 필터가중치(filtered weight)이며, $P(r_t | v_t^{(i)}) = \int_{-\infty}^{r_t} p(y | v_t^{(i)}) dy$ 인 관측치 r_t 의 누적분포함수이다.

dent and identically distributed standard uniform distribution) *i.i.d* $U[0, 1]$ 를 따른다(Rosenblatt (1952)). Hong and Li (2005)는 PIT의 독립성(independence)과 일양성(uniformity)을 검정하는 방법으로 모형을 진단할 수 있는 비모수 옴니버스검정(nonparametric omnibus test)을 제시하였다. Hong and Li (2005) 검정은 모형추정에 따른 불확실성에 영향을 받지 않는 장점이 있지만 비모수 검정이므로 밴드폭(band width)에 해당하는 시차(lag) 선택이 필요하다.

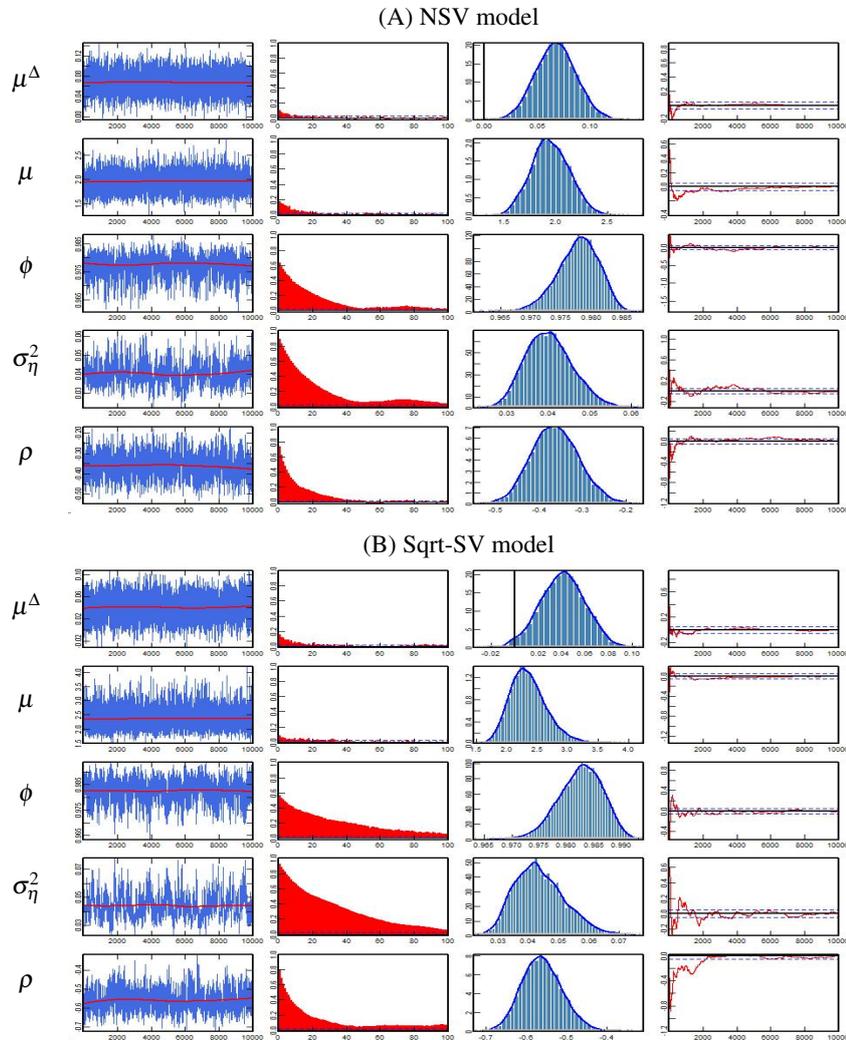
이하에서 Table 5에 수록된 각 확률변동성모형들을 비교하고자 한다. Table 5는 NAGARCH(1,1)모형 파라미터추정치를 변환한 NSV-G모형추정결과를 포함하고 있다. 이를 고려하면, 베이지언 접근법보다는 고전적 접근법에서 모형들을 비교하는 것이 보다 편리할 수 있다⁷. 고전적 접근법에서 Rivers and Vuong (2002)는 다양한 비내포 비선형 동태모형(non-nested nonlinear dynamic models)을 비교하는 방법을 제시하였다. Rivers and Vuong (2002)에 따르면 모형의 파라미터 추정치가 \sqrt{T} 일치성을 가지는 경우 서로 다른 방법으로 추정된 동일한 모형을 비교할 수도 있다. Rivers and Vuong (2002)는 각 모형이 최우추정법으로 추정된 경우, 두 모형의 로그우도가 같다는 귀무가설 하에서 다음과 같이 로그우도함수 표본평균의 차가 표준정규분포를 따른다는 것을 보였다.

$$\frac{\sqrt{T} \left[\overline{\log L(\hat{\theta}_{1T}; M_1)} - \overline{\log L(\hat{\theta}_{2T}; M_2)} \right]}{\hat{\sigma}_T} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (5.5)$$

여기에서 $\hat{\sigma}_T^2 = \text{Var} \left(\sqrt{T} \left[\overline{\log L(\hat{\theta}_{1T}; M_1)} - \overline{\log L(\hat{\theta}_{2T}; M_2)} \right] \right) = T^{-1} \sum_{i=1}^T \log L(y_i, \hat{\theta}_{iT})$ 이다. $\hat{\sigma}_T^2$ 의 추정치로는 Andrews (1991)의 HAC (Heteroskedasticity and autocorrelation consistent)추정치를 이용할 수 있다. 확률변동성모형에 대한 Rivers and Vuong (2002) 모형 비교 방법의 장점은 파라미터 추정에 따른 불확실성을 고려하지 않고서도 모형 비교가 가능하다는 점이다. 무정보에 가까운 사전확률밀도함수를 이용하여 확률변동성모형에 대한 베이지언 추정을 한 경우, 파라미터들의 사후표본평균(또는 최빈수)을 파라미터에 대한 최우추정치로 볼 수 있다. 따라서 보조파티클필터를 통해 얻은 로그우도

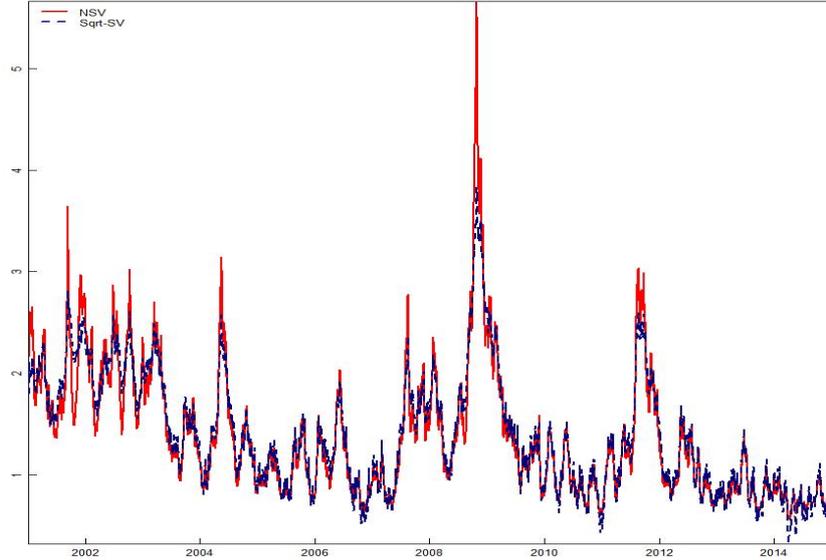
⁷일반적으로 베이지언 추정을 한 경우 주변우도(marginal likelihood)의 비율인 베이즈팩터(Bayes factor)를 이용하여 모형들을 비교할 수 있다. 그러나 확률변동성모형과 같이 미관측 상태변수를 포함하는 모형의 경우 주변우도를 추정하는 것이 다소 복잡할 수 있다. Berg *et al.* (2004)에서 확률변동성모형 비교에 Spiegelhalter *et al.* (2002)의 DIC(deviance information criterion)가 이용된 이후 확률변동성모형에 대한 베이지언 모형 비교 방법으로 DIC가 자주 이용되고 있다. 그러나 DIC는 모수설정(parameterization)에 민감한 특징이 있으므로 비내포모형 비교에 적합하지 않을 수 있다.

Figure 3: Bayesian inference results for stochastic volatility models



Note: Figure 3 displays the summary statistics of posterior samples of NSV and Sqrt-SV models. Each row of panels (A) and (B) displays trace plot, autocorrelation plot, empirical kernel density and Bauwens and Lubrano (1998)'s CUSUM plot that evaluates the convergence of posterior samples. The thick solid lines in the trace plots represents the LOESS estimates that fit the trajectory of the posterior samples of parameters, respectively.

Figure 4: Posterior means of the stochastic volatilities of NSV and Sqrt-SV Models



Note: In Figure 4, the solid and dashed lines represent the posterior sample means of $\sqrt{v_t}$ of NSV and Sqrt-SV models, respectively..

를 이용하여 Rivers and Vuong (2002)에서 제시된 방법으로 모형을 비교할 수 있다.

Johannes *et al.* (2009)는 파티클필터를 통해 얻은 우도함수를 이용하여 확률변동성모형을 비교하는 방법을 제안하였다. 다음과 같은 순차우도비(sequential likelihood ratio)를 이용하여 비교 대상 확률변동성모형이 관측된 자료를 충분히 설명하지 못하는 기간을 식별할 수 있다(Johannes *et al.* (2009)).

$$LR_{i,j}(t) = \frac{L(y^t | M_i)}{L(y^t | M_j)} = \frac{p(y_t | M_i)}{p(y_t | M_j)} \times LR_{i,j}(t-1) \quad (5.6)$$

여기에서 $y^t = \{y_1, \dots, y_t\}$ 이며, $L(y^t | M_i)$ 는 주어진 파라미터값에서 파티클필터를 이용하여 구한 t 기까지의 M_i 모형의 우도함수를 나타낸다.

10만개의 파티클을 이용하는 보조파티클필터를 통해 얻은 PIT의 독립성과 일양성을 검정하는 Hong and Li (2005) 음니버스검정 결과를 Table 6에 수

표 6: Hong and Li (2005) test results for stochastic volatility models

model	lag(p)	M(1,1)	M(2,2)	M(3,3)	M(4,4)	M(1,2)	M(2,1)	W(p)	Q(p)
NSV	20	0.0295	0.4300	1.2074	1.9328	0.1257	0.6869	20.8173	6.5933
	25	0.3165	0.5158	1.0755	1.6162	0.2923	0.8654	22.6327	6.3299
	30	0.5326	0.5659	0.9782	1.3923	0.3962	0.9948	23.8300	4.2122
	35	0.7357	0.6345	0.9425	1.2634	0.5069	1.1191	25.6997	2.6241
	40	0.9606	0.7160	0.9407	1.1895	0.6394	1.2487	26.2986	2.7938
Sqrt-SV	20	-0.1030	0.1723	0.7591	1.3495	-0.0715	0.534	16.6783	3.9200
	25	0.1992	0.2992	0.7045	1.1323	0.1012	0.7559	18.7897	4.4610
	30	0.4356	0.3819	0.6616	0.9765	0.2153	0.9245	19.7514	3.8322
	35	0.6628	0.4799	0.6709	0.9027	0.3400	1.0866	21.6548	0.9490
	40	0.9157	0.5893	0.7074	0.8744	0.4915	1.2525	22.1633	2.7677
NSV-G	20	0.0516	0.3333	0.8725	1.3380	0.0687	0.7479	20.4781	4.6298
	25	0.3669	0.4861	0.8758	1.2221	0.2356	1.0030	22.3847	4.7867
	30	0.6101	0.5859	0.8719	1.1347	0.3442	1.1955	23.8019	5.2768
	35	0.8379	0.6954	0.9095	1.1109	0.4623	1.3731	26.0950	1.9414
	40	1.0906	0.8125	0.9656	1.1169	0.6067	1.5511	27.0776	4.3879

Note: In Table 6, all Hong-Li test statistics follow the standard normal distribution asymptotically, and the gray cell indicates statistical significance at the 5% significance level.

록하였다. Table 6에서 Q(p)와 W(p)⁸는 전반적인 모형설정 오류를 검정하는 옴니버스 통계량을 나타낸다. M(1, 1), M(2, 2), M(3, 3), M(4, 4)는 각각 수준, 조건부분산, 왜도, 첨도의 자기상관(autocorrelation)을 검정하는 통계량으로, 그리고 M(1, 2), M(2, 1)는 각각 ‘arch-in-mean’과 ‘leverage effect’를 검정하는 통계량으로 해석할 수 있다. Hong-Li검정통계량들은 모두 점근적으로 표준정규분포를 따른다. 시차 선택에 따른 검정의 민감도를 살펴보기 위해 20, 25, 30, 35, 40의 시차 선택에 따른 통계량들을 모두 Table 6에 제시하였다. Hong and Li (2005) 검정에서 검정통계량이 안정화되는 시차를 선택하는 것이 필요하다. Table 6에서 회색으로 표시된 부분은 5% 유의수준에서 유의함을 나타낸다. Table 6을 보면 모든 시차에서 Q(p)와 W(p)이 5% 유의수준에서 유의하므로 전반적인 모형설정 오류가 있음을 알 수 있다. 그러나 시차 20의 NSV모형에서 M(4, 4)가 유의한 것을 제외하고 M(1, 1), M(2, 2), M(3, 3), M(4, 4)와 M(1, 2), M(2, 1)의 개별적인 진단통계량들은 모두 유의하지 않음을 알 수 있다. 따라서 조건부분포 또는 고차적률의 종속성을 모형설정 오류의 원인으로 볼 수 있다. 본 실증분석은 본 연구에서 제시하는 알고리즘으로 GARCH 극한 확률 변동성을 추정할 수 있음을 보이고자 하는 것이므로 모형 개선에 대해서는 더

⁸표준정규분포를 따르는 W(p) 통계량은 $W(p) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Q(j)$ 이다.

이상 논의하지 않기로 한다.

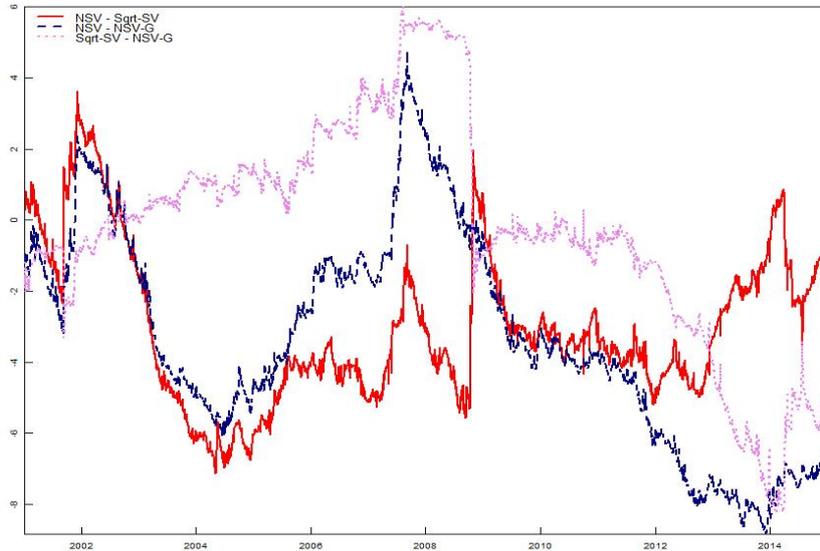
표 7: Non-nested model comparisons (Rivers and Vuong, 2002)

Models compared	Rivers and Vuong test statistics
NSV - Sqrt-SV	-0.0001 (0.95)
NSV - NSV-G	-0.0019 (0.30)
Sqrt-SV - NSV-G	-0.0018 (0.41)

Note: In Table 7, each number in parenthesis represents p-values.

식 (5.5)의 Rivers and Vuong (2002) 검정을 이용한 모형 비교 결과는 Table 7에 수록되어 있다. Table 7에서 괄호안의 수치는 p값을 나타낸다. Table 7의 모형 비교 결과는 NSV모형, Sqrt-SV모형, NSV-G모형들의 차이가 유의하지 않음을 보여주고 있다. 따라서 통계적인 기준에서 이들 모형들 간에 차이가 존재하는 것으로 보기 어렵다. 흥미로운 점은 NSV모형과 NSV-G모형의 파라미터 추정치들이 매우 상이 함에도 불구하고 이 두 모형들의 로그우도의 차가 통계적으로 유의하지 않은 점이다⁹. Figure 5는 각 확률변동성모형들을 비교하는 Johannes *et al.* (2009)의 순차로그우도비를 도시한 것이다. Figure 5에서 실선은 NSV모형과 Sqrt-SV모형, 썬선은 NSV모형과 NSV-G모형, 그리고 점선은 Sqrt-SV모형과 NSV-G모형을 비교하는 순차로그우도비를 나타낸다. 각 모형들을 비교하는 순차로그우도비가 뚜렷한 체계적인 차이를 보이지 않으므로 전반적으로 모형들의 적합성에 유의한 차가 존재하지 않는 것으로 볼 수 있다. 이는 Table 7의 Rivers and Vuong 검정결과와 부합하는 결과이다. 각 모형들의 성과 비교를 위해 옵션가격 결정과 같은 경제적 성과를 비교하는 것이 필요할 것으로 판단된다. 각 모형의 경제적 성과 비교는 본 연구의 범위를 벗어나므로 다른 연구에서 논의하기로 한다.

⁹이와 같은 결과는 표본내 모형 비교결과 이므로, 표본외 모형 비교를 통해 추가적으로 이를 살펴보는 것이 필요하다. 그러나 이러한 특정 확률변동성모형의 Plug-in추정치에 대한 보다 구체적인 논의는 본 논문의 범위를 벗어나므로 더 이상 이를 논의하지 않기로 한다.

Figure 5: Sequential log-likelihood ratios (Johannes *et al.* (2009))

Note: In Figure 5, the solid, dashed, and dotted lines represents the sequential log-likelihood ratios that compare the NSV - Sqrt-SV, NSV - NSV-G, and Sqrt-SV - NSV-G models, respectively.

6. 결론

본 연구는 이산시간 GARCH모형의 연속시간 극한 확산과정을 따르는 확률변동성모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘과 모의실험, 그리고 실증분석을 통한 알고리즘의 성과를 제시하였다. 모의실험을 통해 본 연구의 MCMC 알고리즘을 이용한 베이지언 추정치와 달리 이산시간 GARCH모형 추정치를 연속시간 극한 과정의 파라미터 추정치로 변환하는 경우 모든 확률변동성 방정식 파라미터에 편이가 나타날 수 있음을 확인하였다. 이러한 결과는 본 연구의 알고리즘을 통해 이러한 문제를 확인·수정하거나 해결할 수 있음을 의미한다. 연속시간 확률변동성모형 추정이 쉽지 않다는 것은 이산시간 GARCH 모형의 연속시간 극한 과정의 파라미터 추정치를 얻기 위해 이산시간 GARCH 모형 추정치를 이용하게 하는 원인이다. 그러나 이러한 이산시간 GARCH 모형 추정치를 연속시간 극한 확률변동성모형의 추정치로 변환하는 데 따르는 파라미터 추정치의 편이 문제를 명시적으로 고려하는 것이 필요하다.

본 연구의 1단계NR알고리즘을 이용한 조건부분산 사후확률밀도함수 근사는 이산시간 GARCH모형의 연속시간 극한 확산과정 뿐만 아니라 기존 연구에서 제시된 다양한 확률변동성모형 추정에 이용될 수 있는 일반적인 방법이다. 연속시간 확률변동성모형 추정을 위해 오일러이산화모형을 이용하고 조건부분산 과정의 주변확률밀도함수나 그 확률커널을 알 수 있는 경우 1단계NR알고리즘을 이용한 조건부분산 사후확률밀도함수 근사를 할 수 있다. 따라서 기존 연구에서 제시된 다양한 확률변동성모형을 본 연구의 알고리즘을 이용하여 추정을 할 수 있고 모형들을 비교할 수 있다. 본 연구는 실증분석에서 이러한 조건부분산 사후확률밀도함수 근사 방법을 이용하여 Feller제공근과정을 따르는 확률변동성모형 추정 결과를 제시하고 GARCH모형의 연속시간 극한 확산과정을 따르는 확률변동성모형과 그 성과를 비교하였다. 2001년 1월 3일 ~ 2014년 12월 30일 기간의 KOSPI200 지수 일간 수익률에 대한 실증분석 결과, 통계적인 기준으로 이 두 모형의 차이를 확인할 수 없었다. 후속 연구에서 본 연구의 알고리즘을 이용한 다양한 확률변동성모형 추정과 비교를 다루기로 한다.

참고문헌

- 김태형, 박정민(2017), “단기이자율 확률변동성 모형 비교 : 베이지언 모형 비교,” 『금융연구』 31(3), 179-233.
- Ahn, D-H and B. Gao (1999). “Emerging Market Business Cycles: The Cycle is the Trend,” *Review of Financial Studies* 12, 721-762.
- Aït-Sahalia, Y. (1996). “Nonparametric pricing of interest rate derivative securities,” *Econometrica* 54, 527-560.
- Aït-Sahalia, Y. (2002). “Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions: a closed-form approximation approach,” *Econometrica* 70, 223-262.
- Aït-Sahalia, Y. (2008). “Closed-form likelihood expansions for multivariate diffusions,” *Annals of Statistics* 36, 906-937.
- Aït-Sahalia, Y. and R. Kimmel (2007). “Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models,” *Journal of Financial Economics* 83, 413-452.
- Andrews, D.W.K. (1991). “Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation,” *Econometrica* 59, 817-858.
- Andrews, D.W.K and J.C. Monahan (1992). “An Improved Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimator,” *Econometrica* 60, 953-966.
- Bauwens, L. and M. Lubrano (1998). “Bayesian inference on GARCH models using Gibbs sampler,” *Econometrics Journal* 1, C23-C46.
- Berg, A., R. Meyer and J. Yu (2004). “Deviance Information Criterion for Comparing Stochastic Volatility Models,” *Journal of Business and Economic Statistics* 22, 107-120.
- Brockwell, P.J., C. Erdenebaatar, and A. Lindner (2006), “Continuous time GARCH processes,” *Annals of Applied Probability* 16, 790-826.
- Cappé, O., S.J. Godsill, and E. Moulines (2007), “An Overview of Existing Methods and Recent Advances In Sequential Monte Carlo,” *Proceeding of the IEEE* 95, 899-924.

- Carpenter, J., P. Clifford, and P. Fearnhead (1999), "An improved particle filter for non-linear problems," *IEEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation* 146, 2-7.
- Chacko, G., and L. M. Viceira (2003), "Spectral GMM Estimation of Continuous-time Processes," *Journal of Econometrics* 116, 259-292.
- Chib, S. and E. Greenberg (1995), "Understanding the Metropolis-Hasting Algorithm," *The American Statistician* 49(4), 327-335.
- Chib, S., F. Nardari and N. Shephard (2002), "Markov Chain Monte Carlo Methods for Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics* 108, 281-316.
- _____ (2006), "Analysis of High Dimensional Multivariate Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics* 134, 341-371.
- Christoffersen, P., S. Heston and K. Jacobs (2006), "Option valuation with conditional skewness," *Journal of Econometrics* 131, 253-284.
- Christoffersen, P., K. Jacobs, and K. Mimouni (2010), "Models for S&P 500 Dynamics: Evidence from Realized Volatility, Daily Returns, and Option Prices," *Review of Financial Studies* 23, 3141-3189.
- Conley, T.G., L.P. Hansen, E.G.J. Luttmer, and J.A. Scheinkman (1997), "Short-term interest rates as subordinated diffusions," *Review of Financial Studies* 10, 525-577.
- Corradi, V. (2000), "Reconsidering the continuous time limit of the GARCH(1,1) process," *Journal of Econometrics* 96, 145-153.
- Creal, D. (2009), "A Survey of Sequential Monte Carlo Methods For Economics and Finance," *Econometric Reviews* 31, 245-296.
- Cvsa, V. and P. Ritchken (2001), "Pricing Claims Under GARCH-Level Dependent Interest Rate Processes," *Management Science* 1693-1711.
- Doucet, A. and A.M. Johansen (2011), "A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: Fifteen years Later," in *The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering* (eds.) Crisan, D. and B. Rozovsky, Oxford University Press, 656-704.

- Drost, F.C. and B.J.M. Werker (1996), "Closing the GARCH gap: Continuous time GARCH modeling," *Journal of Econometrics* 74, 31-57.
- Duan, J-C. (1997), "Augmented GARCH(p,q) process and its diffusion limit," *Journal of Econometrics* 79, 97-127.
- Duffie, D. and K. Singleton (1993), "Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices," *Econometrica* Vol. 61, 1993, 929-952.
- Durham G, and A. Gallant (2002), "Numerical techniques for maximum likelihood estimation of continuous-time diffusion processes (with comments)," *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 297-316.
- Elerian O., S. Chib and N. Shephard (2001), "Likelihood inference for discretely observed nonlinear diffusions," *Econometrica* 69, 959-993.
- Engle, R.F and V.K. Ng (1993), "Measuring and testing the impact of news on volatility," *Journal of Finance* 48(5), 1749-1778.
- Eraker, B. (2001), "MCMC analysis of diffusion models with application to finance," *Journal of Business and Economic Statistics* 19, 177-191.
- Eraker, B., M. Johannes and N. Polson (2003), "The Impact of Jumps in Volatility and Returns," *Journal of Finance* 58, 1269-1300.
- Ferriani, F and S. Pastorello (2012), "Estimating and testing non-affine option pricing models with a large unbalanced panel of options," *Econometrics Journal* 15, 171-203.
- Fornari, F. and A. Mele (2000), *Stochastic Volatility in Financial Markets—Crossing the Bridge to Continuous Time*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- _____ (2006), "Approximating Volatility Diffusions with CEV-ARCH Models," *Journal of Economic Dynamics and Control* 30, 931-966.
- Gallant, A.R. and G. Tauchen (1996), "Which moments to match," *Econometric Theory* 12, 657-681.

- Geweke, J. (1992) "Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," in *J.O. Berger, J.M. Bernardo, A.P. Dawid, and A.F.M. Smith eds., Bayesian Statistics 4*, 169-194. Oxford, Oxford Univ. Press.
- Gong, C. and D. Stoffer (2021), "A Note on Efficient Fitting of Stochastic Volatility Models," *Journal of Time Series Analysis* 42, 186-200.
- Gouriéroux, C., A. Monfort and E. Renault (1993), "Indirect Inference," *Journal of Applied Econometrics* 8, S85-118.
- Haug, S., C. Kluppelberg, A. Lindner, and M. Zapp (2007), "Method of moment estimation in the COGARCH(1,1) model," *Econometrics Journal* 10, 320-341.
- Heston, S.L. (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- Heston S.L. and S. Nandi (2000), "A Closed-Form GARCH Option Valuation Model," *Review of Financial Studies* 13, 585-625.
- Hong, Y. and H. Li (2005), "Nonparametric Specification Testing for Continuous-Time Models with Applications to Term Structure of Interest Rates," *The Review of Financial Studies* 18(1), 37-84.
- Hull, J. and A. White (1987), "The Pricing of Options On Assets With Stochastic Volatilities," *Journal of Finance* 42, 281-300.
- Ignatieva, K., P. Rodrigues and N. Seeger (2015), "Empirical Analysis of Affine Versus Nonaffine Variance Specifications in Jump-Diffusion Models for Equity Indices," *Journal of Business and Economic Statistics* 33, 68-75.
- Jacquier, E., N.G. Polson and P.E. Rossi (2004), "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models with Leverage Effect and Fat tails," *Journal of Econometrics* 122(1), 185-212.
- Jiang, G. J., and J. L. Knight (2002), "Estimation of Continuous Time Processes Via the Empirical Characteristic Function," *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 198-212.

- Johannes, M.S. and N.G. Polson (2009), "MCMC methods for Financial Econometrics," in *Handbook of Financial Econometrics* Vol 2, (eds) Ait-Sahalia, Y. and L.P. Hansen 1-72.
- Johannes, M.S., N.G. Polson, and J.R. Stroud (2009), "Optimal Filtering of Jump Diffusions: Extracting Latent States from Asset Prices," *Review of Financial Studies* 22, 2759-2799.
- Jones, C. (2003), "The dynamics of stochastic volatility: evidence from underlying and options markets," *Journal of Econometrics* 116, 181-224.
- Johnson, H. and D. Shanno (1987), "Option Pricing When the Variance Is Changing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, 143-151.
- Kim, S.J., N. Shephard and S. Chib (1998), "Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models," *Review of Economic Studies* 65, 361-393.
- Klüppelberg, C., A. Lindner, and R. Maller (2004), "A continuous-time GARCH process driven by a Levy process: stationarity and second order behaviour," *Journal of Applied Probability* 41, 601-622.
- Le Cam. L. (1986), *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- Lindner, A.M. (2009), "Continuous Time Approximations to GARCH and Stochastic Volatility Models," in *Handbook of Financial Time Series*. (eds.) T.G. Andersen, R.A. Davis, J-P. Kreiß, and T. Mikosch, 481-496.
- Lindsten F., M.I. Jordan and T.B. Schön (2014), "Particle gibbs with ancestor sampling," *Journal of Machine Learning Research* 15, 2145-2184.
- Malik S. and M. Pitt (2011), "Particle filters for continuous likelihood evaluation and maximisation," *Journal of Econometrics* 165, 190-209.
- Nelson, D.B. (1990), "ARCH Models as Diffusion Approximations," *Journal of Econometrics* 45, 7-38.
- Omori, Y., S. Chib, N. Shephard and J. Nakajima (2007), "Stochastic Volatility with Leverage: Fast and Efficient Likelihood Inference," *Journal of Econometrics* 140, 425-449.

- Pitt, M.K., and N. Shephard (1999), "Filtering via simulation: auxiliary particle filters," *Journal of the American Statistical Association* 94, 590–599.
- _____ (2001), "Auxiliary variable based particle filters," in *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Doucet, A., J.F.G. de Freitas, and N.J. Gordon, Springer-Verlag, New York. 271–293.
- Ritchken, P. and R. Trevor (1999), "Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes," *Journal of Finance* 54, 377–402.
- Rivers, D. and Q. Vuong (2002), "Model selection tests for nonlinear dynamic models," *Econometrics Journal* 5, 1–39.
- Roberts, G.O. and O. Stramer (2001), "On inference for partially observed nonlinear diffusion models using the Metropolis-Hastings algorithm," *Biometrika* 88, 603–621.
- Rosenblatt, M. (1952), "Remarks on a Multivariate Transformation," *Annals of Mathematical Statistics* 23, 470–472.
- Schöbel, R. and J.W. Zhu (1999), "Stochastic Volatility with an Ornstein-Uhlenbeck Process: an Extension," *European Finance Review* 3, 23–46.
- Shephard, N. and M.K. Pitt (1997), "Likelihood analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series," *Biometrika* 84, 653–667.
- Singleton, K. J. (2001), "Estimation of Affine Asset Pricing Models Using the Empirical Characteristic Function," *Journal of Econometrics* 102, 111–141.
- Spiegelhalter, D.J., N.G. Best, B.P. Carlin and A. van der Linde (2002), "Bayesian measures of model complexity and fit (with discussion)," *Journal of Royal Statistical Society Series B* 64, 583–639.
- Stein, E.M. and J.C. Stein (1991), "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach," *Review of Financial Studies* 4, 727–752.
- Swishchuck, A. (2013), *Modeling and Pricing Of Swaps For Financial and Energy Markets with Stochastic Volatilities*, World Scientific Publishing Co.
- Tierney, L. (1994), "Markov Chains for Exploring Posterior Distributions" (with discussion), *Annals of Statistics* 22, 1701–1762.

- Wang, Y. (2002), "Asymptotic nonequivalence of GARCH models and diffusions," *Annals of Statistics* 30, 754-783.
- Watanabe, T. (2000), "Bayesian Analysis of Dynamic Bivariate Mixture Models: Can They Explain the behavior of returns and Trading Volume?," *Journal of Business and Economic Statistics* 18, 199-210.
- Wiggins, J.B. (1987), "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates," *Journal of Financial Economy* 19, 351-372.